

Zur Theorie der Kernmassen.

Von **C. F. v. Weizsäcker** in Leipzig.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 6. Juli 1935.)

§ 1. Problemstellung. § 2. Erweiterung der Thomas-Fermi-Methode. § 3. Numerische Auswertung (gemeinsam mit F. S. Wang). § 4. Die Auszeichnung gerader Teilchenzahlen. § 5. Halbempirische Darstellung der Massendefekte. § 6. Zusammenfassung.

§ 1. Problemstellung.

Es ist heute sehr wahrscheinlich geworden, daß Protonen und Neutronen die einzigen elementaren Bausteine der Kerne sind. Da die Ruhenergien dieser Teilchen groß sind gegen die Bindungsenergien der Kerne, sollte man ihre Bewegung im Kern in erster Näherung nach der unrelativistischen Quantenmechanik beschreiben können¹⁾. Wenn die Kräfte zwischen den Elementarteilchen bekannt wären, müßte es also im Prinzip möglich sein, die Bindungsenergien, d. h. die Massendefekte aller Atomkerne zu berechnen. Da die Versuche, diese Kräfte direkt theoretisch zu bestimmen²⁾, noch nicht zu eindeutigen Ergebnissen geführt haben, sind wir vorläufig auf den umgekehrten Weg angewiesen: auf die Ableitung der Kernkräfte aus den empirisch bekannten Massendefekten.

Die Massendefekte der leichtesten Kerne sind heute aus den Energiebilanzen von Zertrümmerungsprozessen sehr genau bekannt³⁾. Mit etwas geringerer Genauigkeit umfassen die massenspektroskopischen Messungen von Aston und Bainbridge⁴⁾ Elemente aus dem ganzen periodischen System. Ergänzt werden diese Angaben durch die oberen Schranken für die Bindungsenergien⁵⁾, die sich aus dem Zerfall oder der Nichtexistenz gewisser Kerne gewinnen lassen: z. B. muß das radioaktive Isotop N_7^{13} jedenfalls eine geringere Bindungsenergie haben als O_6^{13} , da es spontan in diesen Kern zerfällt. Das Erfahrungsmaterial zeigt im wesentlichen die folgenden Gesetzmäßigkeiten:

¹⁾ W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **77**, 1, 1932 (I); **78**, 156, 1932 (II); **80**, 587, 1933 (III); Rapport du VII^{me} Congrès Solvay, Paris 1934, S. 289 (Solvay-Bericht); Zeeman-Festschrift, Haag 1935, S. 108. — ²⁾ I. Tamm, D. Ivanenko, Nature **133**, 981, 1934; W. Heisenberg, Zeeman-Festschrift. — ³⁾ M. L. E. Oliphant, A. R. Kempton u. Lord Rutherford, Proc. Roy. Soc. London (A) **149**, 406, 1935; H. Bethe, Phys. Rev. **47**, 640, 1935. — ⁴⁾ Quantitative Daten bei F. W. Aston, Mass Spectra and Isotopes. London 1933; vgl. auch Nature **135**, 541, 1935. — ⁵⁾ Unter Bindungsenergie ist im folgenden stets eine positive Größe verstanden. Größerer Bindungsenergie entspricht also geringerer Energieinhalt, tiefere Lage des Grundterms.

1. Die Massendefekte der leichtesten Kerne (H_1^2 , H_1^3 , He_2^3 , He_2^4) nehmen außerordentlich rasch mit der Teilchenzahl zu.

2. Die Massendefekte aller schwereren Kerne wachsen ungefähr linear mit der Teilchenzahl.

3. Die Packungsanteile (Massendefekte pro Teilchen) der leichteren Kerne (etwa bis Fe) sind nicht streng konstant, sondern nehmen weiter langsam zu.

4. Die Packungsanteile der schwereren Kerne nehmen nach nahezu konstantem Verlauf wieder langsam ab.

5. Kerne mit geraden Protonen- und Neutronenzahlen sind durchweg etwas stärker gebunden als Kerne mit ungeraden Anzahlen.

Die Möglichkeit einer Erklärung der ersten Tatsache durch eine spezielle Wahl des Kraftansatzes hat Wigner¹⁾ gezeigt. Hand in Hand mit der Zunahme des Packungsanteils geht nach ihm eine Zunahme der Teilchendichte im Kern. Dagegen deutet der Verlauf der Kernradien schwererer Kerne auf ein Konstantbleiben der Dichte hin. Dies, verbunden mit der zweiten Tatsache, beschrieb zuerst Gamow²⁾ phänomenologisch durch sein „Tröpfchenmodell“. Nach Majorana³⁾ folgt dieses Verhalten aus der Annahme einer Austauschkraft zwischen Protonen und Neutronen, wenn das Vorzeichen des Austauschpotentials so gewählt wird, daß die Kräfte sich absättigen. Die Teilchen im Kern verhalten sich dann genau wie Moleküle in einer Flüssigkeit: die Dichte ist konstant und die Bindungsenergie bei gegebenem Mischungsverhältnis der beiden Teilchensorten proportional zur Teilchenzahl. Heisenberg⁴⁾ hat eine Darstellung des Verlaufs der Massendefekte auf Grund dieser Vorstellung gegeben, die später von Wick⁵⁾ durch Berücksichtigung der Kernradien verbessert wurde. Das Kraftgesetz zwischen Proton und Neutron, das aus diesen Untersuchungen folgt, stimmt jedoch nicht mit dem von Wigner gefundenen Gesetz überein.

Die dritte Tatsache wurde von Heisenberg⁴⁾ formal dargestellt durch die Annahme eines progressiven Schlechterwerdens der Approximation von Majorana bei Verminderung der Teilchenzahl im Kern. Wick (l. c.) hat darauf hingewiesen, daß diese Tatsache noch im Rahmen des Tröpfchenmodells durch die Annahme einer Oberflächenspannung der Kerne dargestellt werden kann. In der vorliegenden Arbeit wird das Vorhandensein und die Größe dieser Oberflächenspannung durch eine Erweiterung der von

¹⁾ E. Wigner, Phys. Rev. **43**, 252, 1933; vgl. auch E. Feenberg, ebenda **47**, 850, 1935. — ²⁾ G. Gamow, Proc. Roy. Soc. London (A) **126**, 632, 1930.

— ³⁾ E. Majorana, ZS. f. Phys. **82**, 137, 1933. — ⁴⁾ Solvay-Bericht.

⁵⁾ G. C. Wick, Nuovo Cimento **11**, Nr. 4, 1934.

Majorana verwendeten Thomas-Fermi-Methode direkt aus dem Kraftgesetz abgeleitet (§ 2). Die Ergebnisse von Wick über das Kraftgesetz müssen danach revidiert werden (§ 3). Übereinstimmung mit Wigner läßt sich aber auch durch diese Verbesserung der Methode nicht erreichen¹⁾. Die gewonnene einheitliche Darstellung der Massendefekte (§ 5) kann daher nur als phänomenologische Theorie betrachtet werden.

Die vierte Tatsache läßt sich, wie schon Gamow bei der Aufstellung des Tröpfchenmodells vermutet hatte, durch die Coulombsche Abstoßung der Protonen erklären. Beim Versuch, sie quantitativ zu beschreiben, lassen sich einige Schlüsse auf den Gang der Kernradien mit Ordnungszahl und Atomgewicht ziehen (§ 5).

Die fünfte Tatsache wurde von Heisenberg (l. c., I, II) mit der Bildung abgeschlossener Schalen im Kern in Zusammenhang gebracht. Diese Vorstellung bewährt sich bei der quantitativen Darstellung der Massen der leichten Kerne (§ 4 und 5). Es erscheint insbesondere unnötig, zur Erklärung des Phänomens Kräfte zwischen gleichartigen Teilchen einzuführen.

§ 2. Erweiterung der Thomas-Fermi-Methode.

Daß nach Majorana die Dichte im Kern räumlich konstant ist, rührt mathematisch davon her, daß in der von ihm benutzten Näherung der Thomas-Fermi-Methode nicht nur die gesamte Energie des Kerns eine Funktion des *Verlaufs* der Teilchendichten ist, sondern auch die Energiedichte in jedem Punkt formal als Funktion der Teilchendichte an eben diesem Punkt allein geschrieben werden kann. Für die kinetische Energie folgt dies aus dem Ansatz von Thomas und Fermi: $E_{\text{kin}} = \text{const} \cdot \rho^{5/3}$. Für die potentielle Energie ist es eine Eigenschaft der Austauschkräfte: An die Stelle des üblichen Ausdruckes

$$E_{\text{pot}} = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \rho_P(\mathbf{r}) V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho_N(\mathbf{r}') \quad (1)$$

tritt hier

$$E_{\text{pot}} = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \rho_P^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (2)$$

Dabei ist J das dem Potential V entsprechende „Austauschintegral“, das die Abhängigkeit der Austauschenergie vom Abstand zwischen Proton und Neutron angibt, und $\rho_P(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ bzw. $\rho_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ist die Diracsche gemischte Dichte der Protonen bzw. Neutronen:

$$\rho_P(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_n \psi_n^*(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}') \quad (3)$$

¹⁾ Vgl. dazu W. Heisenberg, ZS. f. Phys., **96**, 1935.

($n =$ alle besetzten Zustände). Wenn viele Zustände besetzt sind (d. h. für große Dichten), ist die gemischte Dichte nahezu die δ -Funktion des Abstandes $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, und dann reduziert sich das Doppelintegral (2) auf ein einfaches Integral über eine bestimmte Funktion der Dichten $\varrho_P(\mathbf{r})$ und $\varrho_N(\mathbf{r})$. Dasselbe gilt auch noch, wenn die Dichten klein sind, aber in Abständen, in denen $J(r)$ gegen Null abfällt, nicht merklich variieren. Ist eine dieser Voraussetzungen erfüllt, so hängt die Energiedichte an einem Punkt nicht mehr von den Dichten an anderen Punkten ab; d. h. keine Stelle im Kern ist vor der anderen energetisch ausgezeichnet und die Dichte ist konstant.

Dieses Modell ist aber im Grunde nur für unendlich große Kerne konsequent. Bei den wirklichen Kernen, die nur eine endliche Zahl von Teilchen enthalten, müßte man in diesem Modell annehmen, daß die Dichte an der Oberfläche un stetig zu Null wird, und daraus entstehen zwei Fehler der Methode. Erstens wird die Berechnung der potentiellen Energie falsch für Teilchen, die sich zu nahe an der Oberfläche befinden. Man darf hier nicht mehr annehmen, daß die Dichte innerhalb der Reichweite der Kräfte konstant sei; die Gesamtmenge der Materie, die sich im Wirkungsbereich der anziehenden Kräfte befindet, ist gegen das Kerninnere vermindert, und die Teilchen befinden sich daher unter einem geringeren Anziehungspotential als im Kerninnern. Genau wie bei makroskopischen Flüssigkeitströpfchen ergibt sich daraus eine zur Oberfläche des Kerns proportionale Abnahme der Bindungsenergie: eine Oberflächenspannung.

Zweitens ist aber ein unendlich steiler Abfall der Dichte am Kernrand wegen der Unbestimmtheitsrelation unmöglich. Denn ein unendlich steiler Abfall der Eigenfunktionen an dieser Stelle würde nach der Gleichung

$$E_{\text{kin}} = \frac{\hbar^2}{2M} |\text{grad } \psi|^2$$

eine unendlich große kinetische Energie zur Folge haben. Der Abfall der Dichte kann daher nicht auf einer kürzeren Strecke als $\hbar/\sqrt{2M\bar{E}_{\text{kin}}}$ stattfinden, wenn \bar{E}_{kin} die mittlere kinetische Energie der Teilchen im Kern bedeutet. In der Thomas-Fermi-Methode kann dieser Effekt berücksichtigt werden, wenn man zum üblichen Energieausdruck ein Glied hinzufügt, das die Abhängigkeit der kinetischen Energie von der Steilheit des Dichteabfalls angibt. Bestimmt man in dieser erweiterten Theorie den Dichteverlauf wieder durch die Bedingung, daß die Gesamtenergie ein Minimum werden solle, so wird die Dichte an der Oberfläche stetig gegen Null gehen.

Der Unterschied der aus der neuen Methode abgeleiteten Bindungsenergie des Kerns gegen die nach Majorana berechnete tritt für hinreichend große Kerne wieder als Oberflächenspannung in Erscheinung.

Die beiden Oberflächenspannungen werden sich in ihrer Größenordnung etwa zueinander verhalten wie die Dicken der Oberflächenschichten, in denen die Berechnung der potentiellen bzw. der kinetischen Energie nach der Methode von Majorana versagt. Die Rechnungen von § 3 werden zeigen, daß der eben genannte quantenmechanische Effekt bei nicht zu extremen Annahmen über das Kraftgesetz zu einer Abfallsbreite der Dichte führt, die etwa um den Faktor 1,5 größer ist als die Abfallsbreite des Austauschpotentials. Außerdem nähert sich eben in dem Maße, in dem höhere kinetische Energien vorkommen, die gemischte Dichte der Gestalt einer δ -Funktion (ihre Breite ist, wie man leicht sieht, auch von der Größenordnung $\hbar / \sqrt{2 M \bar{E}_{\text{kin}}}$). Die „kinetische Oberflächenspannung“ kann also selbst dann nicht wesentlich kleiner werden als die potentielle, wenn der Abfall des Potentials sehr langsam ist gegen den Abfall der Dichte am Kernrand. Es erscheint daher berechtigt, sie zunächst allein zu berücksichtigen. Die nachträgliche Hinzufügung der „potentiellen Oberflächenspannung“ als Korrektur höherer Ordnung wurde wegen der grundsätzlichen Ungenauigkeit der Thomas-Fermi-Methode unterlassen.

Die Abhängigkeit der kinetischen Energie von der räumlichen Ableitung der Dichte soll nun folgendermaßen berücksichtigt werden: Die Thomas-Fermi-Methode beruht darauf, gewisse sehr einfache Eigenfunktionen anzusetzen, die zu einer vorgegebenen Dichte gehören, und aus diesen nach den Gesetzen der Quantenmechanik die Energie zu berechnen. Normalerweise betrachtet man die Dichte in einem kleinen Volumen als konstant und setzt die Eigenfunktionen als ebene Wellen an; die verschiedenen Raumpunkte unterscheiden sich dann nur dadurch, daß in ihnen verschiedene Anzahlen von Teilchen zur Gesamtdichte beitragen. Nunmehr soll auch eine Abhängigkeit der Amplitude der Eigenfunktion vom Ort in jedem kleinen Teilvervolumen angesetzt werden, um die Tatsache zu berücksichtigen, daß nicht nur die Anzahl der Teilchen, sondern auch die Ableitung der Eigenfunktion jedes einzelnen Teilchens für die Gesamtenergie wichtig ist. Da höhere Ableitungen der Eigenfunktion nicht in den Energieausdruck eingehen, genügt es, eine lineare Abhängigkeit vom Ort zu berücksichtigen. Es sei also

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} [1 + (\mathbf{a} \mathbf{r})] e^{\frac{i(\mathbf{p} \mathbf{r})}{\hbar}}. \quad (4)$$

V ist das betrachtete kleine Teilvolumen. Der Vektor \mathbf{a} kann dabei noch von \mathbf{p} abhängen. Die Dichte in V ist

$$\varrho = \frac{1}{V} \int_V^P \frac{V d\mathbf{p}}{h^3} \int d\mathbf{r} 2 \psi^* \psi = \frac{8\pi}{3h^3} P^3, \quad (5)$$

dabei ist das Glied $(\mathbf{a}\mathbf{r})$, das einen mit V verschwindenden Beitrag liefert, weggelassen. Für den Gradienten der Dichte in V ergibt sich dagegen durch Differentiation in (5) unter dem Integralzeichen

$$\text{grad } \varrho = \frac{4}{h^3} \int_V^P \mathbf{a}(\mathbf{p}) d\mathbf{p}. \quad (6)$$

(6) fassen wir als eine Bedingungsgleichung für $\mathbf{a}(\mathbf{p})$ auf.

Die kinetische Energie pro Volumeneinheit wird

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{1}{V} \int_V^P \frac{V d\mathbf{p}}{h^3} \int d\mathbf{r} 2 \cdot \frac{\hbar^2}{2M} \text{grad } \psi^* \text{grad } \psi \\ &= \frac{4\pi}{5} \frac{P^5}{M h^3} + \frac{1}{4\pi^2 \hbar M} \int_V^P [\mathbf{a}(\mathbf{p})]^2 d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (7)$$

Wir haben nun noch über die Abhängigkeit des Koeffizientenvektors \mathbf{a} von \mathbf{p} zu verfügen. Daß hier zunächst eine Unbestimmtheit auftritt, bedeutet anschaulich folgendes: Eine und dieselbe Dichteverteilung läßt sich durch die Überlagerung sehr verschiedenartiger Eigenfunktionen darstellen. Zu diesen verschiedenen Reihen von Eigenfunktionen gehören aber auch verschiedene kinetische Gesamtenergien. Es liegt nahe, die Abhängigkeit des \mathbf{a} von \mathbf{p} so zu wählen, daß die zu einem gegebenen Dichteverlauf gehörige Energie ein Minimum wird. Diese Forderung liefert $\mathbf{a} = \text{const.}$ Damit wird nach (6) und (7)

$$\text{grad } \varrho = \frac{16\pi}{3h^3} P^3 \mathbf{a} = 2\varrho \mathbf{a} \quad (8)$$

und

$$E_{\text{kin}} = \frac{4\pi}{5M h^3} P^5 + \frac{\mathbf{a}^2}{3\pi \hbar M} P^3 = \frac{4\pi \hbar^2}{5M} \left(\frac{3\varrho}{8\pi}\right)^{5/3} + \frac{\hbar^2}{32\pi^2 M} \frac{(\text{grad } \varrho)^2}{\varrho}. \quad (9)$$

Hierin ist das erste Glied der normale Thomas-Fermische Ausdruck für die kinetische Energie; das zweite ist der gewünschte von der Ableitung der Dichte abhängige Zusatz. Es ist interessant, daß dieses Glied mit dem Ausdruck für die kinetische Energie übereinstimmt, den man bei der Durchführung der Thomas-Fermi-Methode für Teilchen mit Bose-Statistik erhält. In diesem Falle befinden sich nämlich alle Teilchen im tiefsten Zustand;

man hat also nicht über ihre Impulse zu integrieren, sondern, wenn N Teilchen vorhanden sind, anzusetzen:

$$\varrho = N \psi^2, \quad E_{\text{kin}} = N \cdot \frac{\hbar^2}{2M} |\text{grad } \psi|^2 \quad (10)$$

und findet daraus durch Elimination von (ψ)

$$E_{\text{kin}} = \frac{\hbar^2}{32 \pi^2 M} \frac{(\text{grad } \varrho)^2}{\varrho}. \quad (11)$$

Für die Gesamtenergie erhalten wir

$$E = \int F \, d\tau = \text{Minimum} \quad (12)$$

mit

$$F = \frac{\hbar^2}{32 \pi^2 M} \left[\frac{(\text{grad } \varrho_P)^2}{\varrho_P} + \frac{(\text{grad } \varrho_N)^2}{\varrho_N} \right] + \frac{4 \pi \hbar^2}{5 M} \left(\frac{3}{8 \pi} \right)^{5/3} (\varrho_P^{5/3} + \varrho_N^{5/3}) - f(\varrho_P, \varrho_N). \quad (13)$$

$f(\varrho_P, \varrho_N)$ ist die potentielle Energie als Funktion der Teilchendichten, die sich aus $J(r)$ berechnen läßt. Die Lösung des Minimalproblems (12) liefert den gesuchten Dichteverlauf. Wir führen zur Vereinfachung des Ausdruckes noch die Wurzel aus der Dichte als neue Variable ein:

$$\psi_P = \sqrt{\varrho_P}; \quad \psi_N = \sqrt{\varrho_N} \quad (14)$$

und erhalten

$$F = \frac{\zeta}{2} [(\text{grad } \psi_P)^2 + (\text{grad } \psi_N)^2] + \frac{\eta}{2} (\psi_P^{10/3} + \psi_N^{10/3}) - f(\psi_P^2, \psi_N^2) \quad (15)$$

mit

$$\zeta = \frac{\hbar^2}{4 \pi^2 M}; \quad \eta = \frac{8 \pi \hbar^2}{5 M} \left(\frac{3}{8 \pi} \right)^{5/3}. \quad (16)$$

§ 3. Numerische Auswertung¹⁾.

Wählen wir für die Austauschenergie $J(r)$ einen einfachen Ansatz, etwa

$$J(r) = a e^{-br}, \quad (17)$$

so haben wir zwei Parameter verfügbar, durch deren Wahl wir also zunächst zwei numerische Erfahrungsdaten darstellen können. Die Übereinstimmung der so gewonnenen Auskunft über das Kraftgesetz mit anderen Kenntnissen muß dann nachträglich den Ansatz rechtfertigen. Heisenberg²⁾ hat in dieser Weise den Verlauf der Massendefekte der mittleren und schweren Kerne qualitativ dargestellt. Da sich beiden von Heisenberg angenommenen

¹⁾ Gemeinsam mit F. S. Wang. — ²⁾ Solvay-Bericht:

Werten der Konstanten a und b die Kernradien zu groß ergaben, hat Wick (l. c.) stattdessen a und b so gewählt, daß der Massendefekt und der Radius des Kerns O_8^{16} richtig dargestellt wurde. Wir haben zunächst versucht, diese Rechnung nur durch die Forderung zu korrigieren, daß der Massendefekt von O_8^{16} nicht gleich der Majoranaschen, sondern gleich der aus Gleichung (12) folgenden Bindungsenergie sein solle. Eine Kontrollrechnung mit den so gewonnenen Werten der Konstanten ergab aber eine wesentlich zu geringe Bindung für schwere Kerne. Wir haben daher den Kernradius von Sauerstoff, der ja jedenfalls wesentlich ungenauer bekannt ist als der Massendefekt, wieder unbestimmt gelassen und die Bedingung gestellt, daß die Massendefekte von Sauerstoff und Quecksilber richtig dargestellt werden sollten. Dabei haben wir nach der folgenden Methode gerechnet:

Da die numerische Integration der Eulerschen Gleichungen des Variationsproblems (12) sehr mühsam ist, werden für die Dichten am besten von vornherein einfache, von einigen Parametern abhängige Funktionen angesetzt und die Parameter aus der Forderung $E = \text{Minimum}$ bestimmt (Ritzsches Verfahren). Die einfachsten Verhältnisse erhält man in dem durch folgende Forderungen definierten Grenzfall:

1. Der Kernradius sei groß gegen die Dicke der Oberfläche (d. h. der Schicht, in der ρ nicht konstant ist). Die Oberfläche kann dann als eben und somit das ganze Problem als eindimensional betrachtet werden¹⁾.

2. Die Coulombsche Abstoßung der Protonen werde bei der Berechnung des Dichteverlaufs nicht berücksichtigt. D. h. beim Vergleich der theoretischen Bindungsenergien mit den Massendefekten soll nur der Mittelwert der Coulombschen Energie, genommen über die ungestörte Dichteverteilung, berücksichtigt werden, nicht aber die zugehörige Energiestörung zweiter Ordnung.

3. Die Anzahl der Protonen im Kern (Z) sei gleich der Anzahl der Neutronen (N). Wegen der Vernachlässigung der Coulombkraft besteht dann volle Symmetrie zwischen beiden Teilchensorten; es kann also durchweg

$$\psi_P = \psi_N = \psi \quad (18)$$

gesetzt werden. Statt (15) erhält man

$$F = \zeta (\text{grad } \psi)^2 + \eta \psi^{10/3} - f(\psi^2, \psi^3). \quad (19)$$

¹⁾ Die Anwendung der Methode auf leichte Kerne, bei denen die Dichte auch im Kerninnern nicht mehr konstant ist, wird in der nachfolgenden Arbeit von S. Flügge gegeben.

Wir setzen nun an

$$\psi = \begin{cases} \frac{\psi_0}{2} e^{\lambda x} & x \leq 0, \\ \psi_0 (1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x}) & x \geq 0. \end{cases} \quad (20)$$

ψ_0 ist die konstante Dichte der Majoranaschen Theorie im Kerninnern. Man erhält sie, wenn man in (19) das Glied $\zeta (\text{grad } \psi)^2$ wegläßt und dann das Minimum von $\int F d\mathbf{r}$ mit der Nebenbedingung

$$\int \psi^2 d\mathbf{r} = N \quad (21)$$

aufsucht (vgl. Heisenberg, Solvay-Bericht). Es folgt dann

$$\frac{2}{3} \eta \psi_0^{10/3} - \frac{\psi_0}{2} \frac{d\varphi(\psi_0)}{d\psi_0} + \varphi(\psi_0) = 0 \quad (22)$$

mit der Abkürzung

$$f(\psi^2, \psi^2) = \varphi(\psi). \quad (23)$$

Der Parameter λ wird aus (19) unter Einsetzung von (20), ebenfalls verbunden mit der Nebenbedingung (21), bestimmt. Dabei sind die Integrale zu erstrecken: in der y - und z -Richtung über eine beliebige Fläche YZ , zu der das Resultat direkt proportional wird; in der x -Richtung von $-\infty$ bis zu einem sehr großen Wert X , der in der Grenze $N \rightarrow \infty$ gleich $N/YZ \psi_0^2$ wird. Aus (21) folgt (unter Vernachlässigung von $e^{-\lambda X}$):

$$X = \frac{N}{YZ \psi_0^2} + \frac{3}{4\lambda}. \quad (24)$$

Der Wert von λ folgt aus der Bedingung

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda} = 0. \quad (25)$$

Aus dem exponentiellen Ansatz (20) ergibt sich eine sehr einfache Eigenschaft von λ . $(\text{grad } \psi)^2$ hat den Faktor λ^2 ; die Integration über x liefert einen Faktor $1/\lambda$; also ist die kinetische Energie des Dichteabfalls proportional zu λ , also umgekehrt proportional zur Dicke der Oberfläche. Die beiden anderen Summanden in (19) enthalten außer dem von ψ_0 herrührenden, zum Volumen XYZ proportionalen Glied, das in der Majoranaschen Theorie allein vorhanden ist, ein zu $1/\lambda$, d. h. zur Breite der Oberfläche direkt proportionales Glied, das die Verminderung dieser Volumenenergie durch die Abweichung der Dichte in der Oberfläche von dem günstigsten Wert ψ_0 angibt. Die Gesamtenergie ist also von der Form

$$E = E_{\text{Volumen}} + \alpha \lambda + \frac{\beta}{\lambda}. \quad (26)$$

Dieser Ausdruck wird zum Minimum für

$$\alpha \lambda = \frac{\beta}{\lambda}, \quad (27)$$

oder physikalisch gesagt: In der Näherung, in der man den Dichteabfall durch die Exponentialfunktion (20) darstellen kann, muß die Breite der Oberfläche so gewählt werden, daß die aus der Unbestimmtheitsrelation folgende Zusatzenergie des Dichteabfalls genau so groß ist wie die Abnahme der Volumenenergie, die durch die Verminderung der Dichte in der Oberfläche erzeugt wird.

Der genaue Ausdruck für E lautet

$$E = [\eta \psi_0^{10/3} - \varphi(\psi_0)] \frac{N}{\psi_0^2} + \frac{\zeta \psi_0^3 \lambda}{2} YZ. \quad (28)$$

Das erste Glied ist die Volumenenergie, das zweite der gesuchte, zur Oberfläche proportionale Zusatz. λ ist durch die Gleichung

$$\lambda^2 = \frac{4}{\zeta \psi_0^2} \left\{ \eta \left[\frac{3}{4} \psi_0^{10/3} + \frac{3}{10} \left(\frac{\psi_0}{2} \right)^{10/3} - \int_{\psi_0/2}^{\psi_0} \frac{\psi_0^{10/3} - \psi^{10/3}}{\psi_0 - \psi} d\psi \right] \right. \\ \left. - \left[\frac{3}{4} \varphi(\psi_0) + \int_0^{\psi_0/2} \varphi(\psi) \frac{d\psi}{\psi} - \int_{\psi_0/2}^{\psi_0} \frac{\varphi(\psi_0) - \varphi(\psi)}{\psi_0 - \psi} d\psi \right] \right\} \quad (29)$$

gegeben. Die Funktion $\varphi(\psi)$ hat Heisenberg (Solvay-Bericht) aus dem Ansatz (17) berechnet; für den Fall $N = Z$ heißt sie

$$\varphi(x) = \frac{\alpha b^3}{6\pi} [4x^2 - (1 + 6x^2) \log(1 + 4x^2) + 8x^3 \operatorname{arctg} 2x] \quad (30)$$

mit

$$x = \frac{1}{b} \sqrt[3]{3\pi^2 \psi^2}. \quad (31)$$

Die numerische Rechnung verläuft nach folgendem Schema: Aus gegebenen Werten von a und b folgt nach (22) ψ_0 , daraus nach (29) λ und schließlich nach (28) E . Dabei wird für die Größe der Oberfläche YZ in (28) die Kernoberfläche $4\pi r^2$ gesetzt, und r aus der Dichte ψ_0^3 und der Teilchenzahl N unter der Annahme homogener Dichte bis zum Rand berechnet. (Diese Bestimmung von r wird zwar ungenau für $r \sim 1/\lambda$; in diesem Fall versagt aber die angewandte Näherung ohnehin.) Zu der berechneten Energie ist schließlich die Coulombsche Energie von Z über eine Kugel vom Radius r gleichförmig verteilten Protonen

$$E_C = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{r} \quad (32)$$

hinzuzufügen.

Tabelle 1.

ψ_0	a	b	λ	$d = 1/\lambda$	r_0	r_{Hg}
0,9	101	1,62	1,18	0,85	1,95	4,53
1,0	118	1,85	1,25	0,80	1,80	4,19
1,2	156	2,29	1,39	0,72	1,61	3,74
1,4	198	2,72	1,52	0,66	1,45	3,37
Wigner	107	2,88				

Tabelle 2.

ψ_0	Kern	ε_V	ε_O	ε_C	$\varepsilon_{\text{theor}}$	ε_{exp}
0,9	O_8^{16}	— 129	37	10	— 82	— 83,0
	Hg_{80}^{200}	— 129	16	34	— 79	— 82,5
1,0	O_8^{16}	— 135	42	11	— 82	— 83,0
	Mo_{42}^{100}	— 135	23	25	— 87	— 87,6
	Hg_{80}^{200}	— 135	18	36,5	— 80,5	— 82,5
1,2	O_8^{16}	— 147	53	12	— 82	— 83,0
	Mo_{42}^{100}	— 147	29	28	— 90	— 87,6
	Hg_{80}^{200}	— 147	23	41	— 83	— 82,5
1,4	O_8^{16}	— 159	64	13	— 82	— 83,0
	Mo_{42}^{100}	— 159	35	31	— 93	— 87,6
	Hg_{80}^{200}	— 159	27,5	45	— 86,5	— 82,5

In Tabelle 1 sind zu verschiedenen ψ_0 diejenigen Werte von a und b angegeben, die den richtigen Massendefekt von Sauerstoff ergeben, daneben die zugehörigen Werte der Abfallskonstante und der Breite der Oberfläche sowie die aus ψ_0 folgenden Kernradien von O_8^{16} und Hg_{80}^{200} . Die letzte Zeile enthält die a - und b -Werte von Wigner. Tabelle 2 enthält für dieselben a und b die theoretischen Massendefekte pro Teilchen verschiedener Kerne, und zwar nach Summanden zerlegt: Volumenenergie nach Majorana (ε_V), Oberflächenenergie (ε_O) und Coulomb-Energie (ε_C); dazu die empirischen Werte. Dabei wurden ε_V und ε_O mit unseren Formeln für $N = Z$ ($= 1/2$ Atomgewicht) berechnet; für Z im Ausdruck für ε_C wurde dagegen die wirkliche Ordnungszahl eingesetzt. Da der Absolutbetrag der Austauschenergie mit wachsendem Verhältnis N/Z abnimmt, liegen die berechneten Werte daher tiefer als die theoretisch korrekten. Die Energien sind in 10^{-4} Masseneinheiten (ME.) angegeben; die Längeneinheit ist der klassische Elektronenradius ($2,8 \cdot 10^{-13}$ cm).

Die experimentellen Werte des Packungsanteils sind berechnet unter der Annahme, daß die Masse des Neutrons 1,0085 sei (wahrscheinlichster Wert nach Bethe). Der für die Rechnungen angenommene Packungsanteil von O_8^{16} wäre für eine Neutronenmasse 1,0083 genau richtig. Da nach

Tabelle 1 für O_8^{16} die Dicke der Oberflächenschicht schon beinahe die Hälfte des Kernradius beträgt, liegt die Abweichung innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der Approximation des Ansatzes (20).

Da die theoretischen Energien für die beiden schweren Kerne wegen der Annahme $N = Z$ zu tief liegen, kann erst in der Gegend von $\psi_0 = 1,4$ von Übereinstimmung mit der Erfahrung gesprochen werden. Die von Wick angenommene Dichte ($\psi_0 = 0,9$) liegt also wesentlich zu tief. Die neuen Kernradien ($\sim 3,4$ für Hg) scheinen auch wesentlich besser als die aus $\psi_0 = 0,9$ folgenden mit den von Gamow aus den Lebensdauern von α -Strahlern bestimmten Radien übereinzustimmen. Dies, verbunden mit der qualitativ richtigen Darstellung des Ganges der Massendefekte mit dem Atomgewicht, läßt darauf schließen, daß die relative Größenordnung von ε_V , ε_O und ε_C sowie die Breite der Oberfläche ($d \simeq 0,65$ El. R.) bereits näherungsweise der Wirklichkeit entspricht.

Dagegen stimmen die Werte von a und b gar nicht mit den von Wigner durch eine quantenmechanisch sehr viel genauere Rechnung bei He_2^4 gefundenen Werten überein, und zwar sind wir genötigt, eine sehr viel *stärkere* Anziehung zwischen Neutron und Proton anzunehmen als Wigner. Da andererseits der Packungsanteil von He_2^4 durchaus von der Größenordnung der Packungsanteile schwererer Elemente ist, müßte man bereits durch eine lockere van der Waalssehe Bindung von He-Kernen aneinander schwere Kerne aufbauen können, die nahezu die richtigen Massendefekte haben. Damit ist ein Kernmodell angegeben, das schon mit den Wignerschen Werten von a und b die richtigen Massendefekte liefert. Würde man mit unseren a und b die Kernenergien nach diesem Modell berechnen, so würde man daher wesentlich zu große Massendefekte erhalten. Da die wirkliche Eigenfunktion des Grundzustandes eines quantenmechanischen Systems diejenige ist, die bei gegebenem Potential die tiefste Energie liefert, muß demnach die Abweichung der Größenordnung unserer Kraft von der Wignerschen durch die Ungenauigkeit unseres Modells verursacht sein.

Der Fehler liegt nicht in der zur Lösung von (12) verwendeten Näherungsmethode. Wir haben für ein bestimmtes Paar von Werten a , b die zu (12) gehörigen Eulerschen Differentialgleichungen numerisch integriert und auf 1⁰/₁₀₀ genau denselben Energiewert gefunden wie nach dem Ansatz (20). Die Unrichtigkeit unseres Resultates muß also in der Ungenauigkeit der Thomas-Fermi-Methode begründet sein. Daß unsere Rechnungen den Gang der Massendefekte mit dem Atomgewicht ungefähr richtig wiedergaben, dürfte daran liegen, daß die Dichten und daher auch die Fehler der Thomas-Fermi-Methode vom Atomgewicht nahezu unabhängig sind.

Die bisherigen Methoden reichen also nicht aus, um aus den Massendefekten der schwereren Kerne quantitative Schlüsse auf die Wechselwirkung zwischen Proton und Neutron zu ziehen. Wir wollen trotzdem versuchen, die qualitative Übereinstimmung unserer Ergebnisse mit der Erfahrung zu einer Art phänomenologischer Darstellung der Kernmassen zu verwenden. Wir werden dabei von Annahmen über das Kraftgesetz ganz absehen und nur voraussetzen, daß die Kernenergien überhaupt als Summe eines zum Volumen und eines zur Oberfläche proportionalen Gliedes und der Coulomb-Energie aufgefaßt werden können.

§ 4. Die Auszeichnung gerader Teilchenzahlen.

Die bekannte energetische Auszeichnung der Kerne, die gerade Protonen- und Neutronenzahlen enthalten¹⁾, macht die einheitliche Darstellung aller Kernenergien durch *eine* glatte Funktion der Teilchenzahlen unmöglich. Es läßt sich aber eine einfache Vorschrift angeben, durch die bei gegebener Energiefunktion für gerade Kerne die Energien der ungeraden Kerne näherungsweise berechnet werden können.

Wir betrachten den Verlauf der Bindungsenergien in einer Isotopenreihe. Bei allen stabilen Kernen wird die totale Bindungsenergie durch Anlagerung eines Neutrons erhöht. Auch wenn man über das schwerste stabile Isotop hinaus weitere Neutronen hinzufügt, muß die Bindungsenergie des Kerns zunächst weiter wachsen; denn der β -Zerfall wird bereits energetisch möglich, wenn die Bindungsenergie des zuletzt angefügten Neutrons an den Restkern geringer ist als die Bindungsenergie eines zusätzlichen Protons an diesen Restkern, also längst ehe die Bindungsenergie des zuletzt angefügten Neutrons Null geworden ist. Vermindert man umgekehrt die Neutronenanzahl unter diejenige des leichtesten stabilen Isotops, so wird es sogar energetisch günstig, Protonen in Neutronen zu verwandeln; der Energiegewinn bei Anlagerung eines Neutrons ist hier eher größer als im Gebiet der stabilen Kerne. Die Energien aller stabilen oder dem Bereich der stabilen Kerne hinreichend benachbarten Isotope eines Elements liegen also in erster Näherung auf einer mit wachsender Neutronenzahl monoton abnehmenden, nach oben gekrümmten Kurve (Fig. 1: O_8^{14} bis O_8^{20}). Dieselbe Überlegung gilt mutatis mutandis für die durch sukzessive Anlagerung eines Protons entstehenden Folgen von Kernen (z. B. C_6^{14} , N_7^{15} , O_8^{16} , F_9^{17} , Ne_8^{18}).

Wir nehmen nun an, daß die Neutronen und Protonen im Kern in Zweierschalen angeordnet seien, d. h. daß jeweils zwei und nicht mehr als

¹⁾ W. Heisenberg, l. c. II. Weiteres Material bei K. Guggenheimer, Journ. de phys. **5**, 475, 1934 und S. Flügge, ZS. f. Phys. **95**, 312, 1935.

zwei im selben Zustand und daher in erster Näherung mit derselben Bindungsenergie angelagert werden können. Daß überhaupt abgeschlossene Schalen im Kern vorhanden sein müssen, folgt aus dem Pauli-Prinzip; daß jeweils nach der Anlagerung von zwei Teilchen eine neue Schale abgeschlossen ist, muß man wohl auch unabhängig von der energetischen Auszeichnung der Kerne mit geraden Teilchenzahlen annehmen, um zu verstehen, daß nach dem heutigen Stand unseres Wissens *alle* Kerne mit gerader Neutronen- und Protonenzahl den Spin Null haben.

Die Existenz größerer Schalen, nach deren Abschluß jeweils ein besonders großer Sprung in den Bindungsenergien auftritt¹⁾, ist dadurch natürlich nicht ausgeschlossen. In einem Modell, das in erster Näherung nur solche größeren Schalen liefert (also z. B. bei jeder Behandlung des Problems, die von den Zuständen einzelner Teilchen in einem kugelsymmetrischen Potential ausgeht), ist es allerdings notwendig, eine Erklärung dafür zu geben, daß die Entartung dieser Zustände in zweiter Näherung stets so aufgehoben wird, daß eine Periodizität mit der Zahl 2 entsteht. Dazu kann die Annahme einer Wechselwirkungskraft zwischen gleichen Teilchen dienen. Es ist aber wahrscheinlich, daß schon die bloße Abweichung der wirklichen Kerne von dem Modell eines Zentralfeldes genügt, um alle höheren Entartungen aufzuheben; so wie z. B. die Elektronen in mehratomigen Molekülen durchweg in Zweierschalen angeordnet sind²⁾. Eine Möglichkeit, diese Abweichung des Kraftfeldes auf ein einzelnes Proton bzw. Neutron von der Kugelsymmetrie darzustellen, bietet das Modell, in dem die Protonen und Neutronen in erster Näherung zu α -Teilchen zusammengefaßt werden; in diesem Modell ist wenigstens die Auszeichnung der Kerne mit gerader Protonenzahl unmittelbar evident, ohne daß außer der Coulombschen Abstoßung eine Wechselwirkung zwischen zwei Protonen angenommen werden müßte. Jedes andere Modell, das die individuelle Wechselwirkung des gerade betrachteten Teilchens mit den Teilchen der anderen Sorte nicht in ein Zentralfeld ausschmiert (das die Eigenfunktionen der Kernteilchen also nicht in der Hartreeschen Näherung, sondern im Konfigurationsraum behandelt) würde aber qualitativ dasselbe Resultat liefern.

Wenn je zwei aufeinanderfolgende Neutronen mit derselben Bindungsenergie angelagert werden, so ist die Bindungsenergie eines Kernes, der eine ungerade Anzahl von Neutronen enthält, gleich dem arithmetischen Mittel der Bindungsenergien seiner beiden Nachbarn in der Isotopenreihe, die gerade Neutronenzahlen enthalten. Sind also die Energien der „geraden“ Isotopen durch eine glatte Kurve dargestellt, so erhält man die Energie der ungeraden Isotope durch geradlinige Interpolation zwischen den „geraden“ Punkten der Kurve (vgl. O_8^{15} , O_8^{17} , O_8^{19} in Fig. 1). Die entsprechende Konstruktion gilt für Kerne mit ungeraden Protonenzahlen (z. B. N_7^{15} , F_9^{17}). Man erhält

¹⁾ Vgl. die Untersuchungen von A. Landé, Phys. Rev. **43**, 620, 624, 1933; G. Gamow, ZS. f. Phys. **89**, 592, 1934; W. Elsasser, Journ. de phys. **4**, 549, 1933; **5**, 389, 1934; **5**, 636, 1934. — ²⁾ Hierauf hat mich Herr Prof. Hund freundlicherweise hingewiesen.

so durch Interpolation zwischen den Kernen, die eine gerade Zahl von Protonen *und* Neutronen enthalten, die Kerne, bei denen eine der beiden Zahlen ungerade ist, und durch nochmalige Interpolation zwischen den letzteren die Kerne, bei denen beide Teilchenzahlen ungerade sind. In Formeln:

$$E(Z, N + 1) = \frac{1}{2} [E(Z, N) + E(Z, N + 2)], \quad (33a)$$

$$E(Z + 1, N) = \frac{1}{2} [E(Z, N) + E(Z + 2, N)], \quad (33b)$$

$$E(Z + 1, N + 1) = \frac{1}{4} [E(Z, N) + E(Z, N + 2) + E(Z + 2, N) + E(Z + 2, N + 2)] \quad (33c)$$

(Z und N gerade).

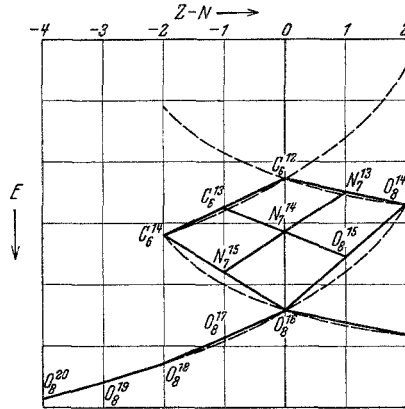


Fig. 1. Schematischer Verlauf der Massendefekte in Isotopenreihen.

In zweiter Näherung erhält man für die Anlagerung des zweiten Neutrons sogar einen größeren Energiegewinn als für die Anlagerung des ersten. Sei (in der Näherung, in der man von Eigenfunktionen einzelner Teilchen im Kern reden darf) $\psi(\mathbf{r}_P)$ die Eigenfunktion irgendeines Protons im Kern, $\varphi(\mathbf{r}_1)$ die Eigenfunktion des ersten Neutrons, $\varphi(\mathbf{r}_2)$ die des zweiten Neutrons, und zwar seien ψ_0, φ_0 die Eigenfunktionen ohne Berücksichtigung der Wechselwirkung, ψ_m, φ_n die Eigenfunktionen irgendwelcher angeregten Zustände mit den Energien E_m und E_n , und bedeute $J_{00, mn}^{(0)}$ das Integral

$$J_{00, mn}^{(0)} = \int \psi_0^*(\mathbf{r}_P) \varphi_0^*(\mathbf{r}_i) J(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_i) \psi_m(\mathbf{r}_i) \varphi_n(\mathbf{r}_P) d\mathbf{r}_P d\mathbf{r}_i \quad (34)$$

so ist im Falle, daß nur *ein* Neutron vorhanden ist, die Wechselwirkungsenergie mit dem Proton nach den Grundformeln der Störungsrechnung

$$E^{(1)} = J_{00, 00}^{(1)} - \sum'_{m n} \frac{J_{00, mn}^{(1)} J_{mn, 00}^{(1)}}{E_m + E_n - E_0}. \quad (35)$$

Das erste Glied ist der Mittelwert der Energie, genommen über die ungestörten Eigenfunktionen, das zweite Glied stellt die von der Störung der Eigenfunktionen herrührende Korrektur dar. Die $\sum'_{m n}$ ist wie üblich über alle m und n außer $m = n = 0$ zu erstrecken. Daß dieses zweite Glied die Energie herabsetzt ($J_{00, mn}^{(1)} \cdot J_{mn, 00}^{(1)}$ ist stets positiv), bedeutet anschaulich: die Eigenfunktionen werden durch die Anziehung so verändert, daß der

mittlere Abstand der beiden Teilchen kleiner wird; dadurch rückt der Mittelwert der Energie, genommen über die gestörte Eigenfunktion, tiefer. Sind zwei Neutronen vorhanden, so ist

$$E^{(1,2)} = J_{00,00}^{(1)} + J_{00,00}^{(2)} - \sum'_{m n n'} \frac{(J^{(1)} + J^{(2)})_{000, m n n'} (J^{(1)} + J^{(2)})_{m n n', 000}}{E_m + E_n + E_{n'} - E_0}. \quad (36)$$

Dabei ist z. B.

$$J_{000, m n n'}^{(1)} = \int \psi_0^*(\mathbf{r}_P) \varphi_0^*(\mathbf{r}_1) \varphi_0^*(\mathbf{r}_2) J(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_1) \psi_m(\mathbf{r}_1) \varphi_n(\mathbf{r}_P) \varphi_{n'}(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_P d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (37)$$

nur für $n' = 0$ von Null verschieden; entsprechend $J_{000, m n n'}^{(2)}$ nur für $n = 0$ (d. h. es gibt keine Übergänge, bei denen beide Neutronen gleichzeitig springen). Es folgt also wegen $J_{000, m n 0}^{(1)} = J_{00, m n}^{(1)}$

$$E^{(1,2)} = J_{00,00}^{(1)} + J_{00,00}^{(2)} - \sum'_{m n} \frac{J_{00, m n}^{(1)} J_{m n, 00}^{(1)}}{E_m + E_n - E_0} - \sum'_{m n'} \frac{J_{00, m n'}^{(2)} J_{m n', 00}^{(2)}}{E_m + E_{n'} - E_0} - \sum'_m \frac{J_{00, m 0}^{(1)} J_{m 0, 00}^{(2)} + J_{00, m 0}^{(2)} J_{m 0, 00}^{(1)}}{E_m - E_0}. \quad (38)$$

Die vier ersten Glieder sind die normalen Störungsenergien erster und zweiter Ordnung für die beiden Neutronen. Das letzte Glied bedeutet anschaulich: die Eigenfunktion des Protons wird durch die Anziehung des ersten Neutrons beeinflusst, und dadurch wird zugleich seine Wechselwirkungsenergie mit dem zweiten Neutron verändert und umgekehrt. Wenn beide Neutronen im selben Zustand sind, so sind die Matricelemente von $J^{(1)}$ gleich denen von $J^{(2)}$; dann drückt dieses letzte Glied die Gesamtenergie mit Sicherheit weiter herab. Der Betrag, um den die Energie, mit der zwei Neutronen in derselben Schale gebunden werden, tiefer liegt als die doppelte Energie eines einzelnen Neutrons, ist

$$E^{(1,2)} - 2E^{(1)} = -2 \sum'_m \frac{|J_{00, m 0}|^2}{E_m - E_0}, \quad (39)$$

noch summiert über alle im Kern befindlichen Protonen. Dieselbe Rechnung gilt natürlich für die Wechselwirkung von zwei Protonen mit den Kernneutronen.

Es sei hervorgehoben, daß in dieser Rechnung keine direkte Wechselwirkung zwischen den Neutronen (bzw. Protonen) angenommen wurde. Über die Größe des Effekts läßt sich schwer eine allgemeine Abschätzung gewinnen. Bei den leichtesten Kernen ist er sehr erheblich; er ist es ja, der nach Wigner bewirkt, daß der Massendefekt des α -Teilchens nicht viermal so groß ist wie der Massendefekt des Deuterons, wie es bei bloßer Addition

der Störungsenergien zu erwarten wäre, sondern dreizehn- bis vierzehnmal so groß. Für schwerere Kerne wird der Effekt abnehmen, da mit wachsender Teilchenzahl die Rückwirkung eines gebundenen Teilchens auf den Restkern relativ geringer werden dürfte. Dies gilt allerdings nicht, wenn die Protonen im Kern sich jeweils mit ebenso vielen Neutronen zu α -Teilchen vereinigen; dann wird bei sukzessiver Anlagerung von zwei Protonen das zweite stets eine wesentlich stärkere Bindung erfahren als das erste, da die Eigenschaften des neugebildeten α -Teilchens von der Anzahl der sonst im Kern vorhandenen Teilchen in erster Näherung unabhängig sind. Nach den Ergebnissen von § 5 scheint es, als ob das Modell der im Kern vorgebildeten α -Teilchen wenigstens für die leichten Kerne keine gute Annäherung an die Wirklichkeit sei. Wenn aber die aus diesem Modell folgenden Eigenfunktionen der Teilchen im Kern bei einer näherungsweisen Darstellung der wirklichen Eigenfunktionen durch eine Summe der aus verschiedenen einfachen Modellvorstellungen folgenden Eigenfunktionstypen auch nur mit dem Faktor $1/10$ vorkommen (wenn also, grob gesagt, nur etwa $1/10$ aller Kernprotonen zu α -Teilchen vereinigt sind), so würde diese kleine, aber vom Atomgewicht unabhängige Energiedifferenz zwischen dem ersten und dem zweiten Proton einer Schale für schwere Kerne doch eine wichtige Rolle spielen. Denn bei den großen Teilchenzahlen der schweren Kerne wird die Krümmung der Kurven der Bindungsenergie als Funktion der Protonen- bzw. Neutronenzahlen sehr gering und ein relativ kleiner Unterschied zwischen den Werten für gerade und ungerade Kerne hat daher schon große Konsequenzen für die Frage der Stabilität gegen β -Zerfall.

Zum Vergleich unserer Vorstellungen mit der Erfahrung wählen wir zunächst die geradlinige Interpolation (33). Die genaueste Prüfung dürfte bei den Kernen von Typ N_7^{14} (N und Z ungerade) möglich sein. Nach (33c) müßte die Energie des Stickstoffkerns gegeben sein durch

$$E(N_7^{14}) = \frac{1}{4}[E(C_6^{12}) + E(C_6^{14}) + E(O_8^{14}) + E(O_8^{16})]. \quad (40)$$

Die experimentellen Bindungsenergien von C_6^{12} , N_7^{14} und O_8^{16} sind in Tabelle 4 gegeben. Sie zeigen, daß $E(N_7^{14})$, wie es nach Fig. 1 zu erwarten ist, wesentlich höher liegt als das arithmetische Mittel der Energien der beiden Nachbarkerne vom Typ $N = Z$. $E(C_6^{14})$ und $E(O_8^{14})$ sind nicht gemessen. Wie wissen aber aus der Stabilität von N_7^{14} , daß beide Energien höher liegen müssen als der empirische Wert von $E(N_7^{14})$. Ferner muß $E(O_8^{14})$ noch um den Unterschied zwischen der Coulombschen Abstößungsenergie von acht Protonen gegen diejenigen von sechs Protonen (bei einem Kernradius, der nach Tabelle 1 kleiner ist als 1,45 Elektronenradien, und bei

Berücksichtigung des Protonenaustausches, vgl. § 5, Gleichung (50) höher liegen als $E(O_6^{14})$. D. h.

$$\begin{aligned} E(O_6^{14}) &\leq E(O_8^{14}) - 2,4 \\ -108,6 &\leq E(O_6^{14}) \end{aligned}$$

und schließlich

$$E(N_7^{14}) \geq -111,1^1).$$

Der Unterschied gegen den empirischen Wert $-108,6$ ist also im ungünstigsten Fall $2,5 \cdot 10^{-3}$ ME., d. h. zweieinhalb Millionen Volt. Da bei der Herleitung von (33c) die lineare Interpolation zweimal verwendet ist, genügt es daher, anzunehmen, daß die wirklichen Bindungsenergien der Kerne mit ungeraden Teilchenzahlen im Gebiet der leichteren Kerne höchstens um durchschnittlich 1 bis $1\frac{1}{2}$ Millionen Volt geringer sind als das arithmetische Mittel der Bindungsenergien der geraden Nachbarkerne. Zur Erklärung dieses Unterschiedes dürfte die Störungsenergie zweiter Ordnung (39) genügen. Da wir für diese keinen quantitativen Ansatz machen können, werden wir uns bei der Darstellung der Masseneffekte leichter Kerne im folgenden Paragraphen auf die Methode der linearen Interpolation beschränken.

Es sei hervorgehoben, daß die lineare Interpolation nicht ausreicht, um die Labilität *aller* Kerne mit ungerader Protonen- und Neutronenzahl oberhalb N_7^{14} zu erklären. Denn das arithmetische Mittel von $E(Z, N)$ und $E(Z+2, N+2)$ (Formel 33c) wird im allgemeinen (vgl. die obige Abschätzung und die Überlegungen von § 5) tiefer liegen als das arithmetische Mittel von $E(Z+2, N)$ und $E(Z, N+2)$, und $E(Z+1, N+1)$ wird daher tiefer liegen als der Mittelwert der Energien seiner beiden Isobare $(Z+2, N)$ und $(Z, N+2)$. Wenn diese beiden Kerne nahezu dieselbe Energie haben, müßte der Kern $(Z+1, N+1)$ also stärker gebunden sein als beide. Dies ist in der Tat der Fall bei den leichten Kernen H_1^2 , Li_3^6 , B_5^{10} , N_7^{14} . Dagegen ist F_9^{18} nicht mehr stabil, offenbar weil durch den wachsenden Einfluß der Coulombenergie der Unterschied zwischen seinen beiden Isobaren O_8^{18} und Ne_{10}^{18} zu groß geworden ist (vgl. Fig. 3). Wenn sich aber das Minimum der Bindungsenergie bis zum Neutronenüberschuß Zwei verschoben hat, so müßten Kerne von diesem Typ (etwa K_{19}^{40}) wieder stabil sein; dasselbe müßte sich bei wachsendem Neutronenüberschuß periodisch wiederholen. Da stabile oder nahezu stabile Kerne dieser Art

¹⁾ Wir messen die Kernenergien durchweg in 10^{-3} ME. Der wahrscheinliche Fehler der empirischen Daten beträgt dann mehrere Einheiten der ersten Stelle nach dem Komma.

nicht bekannt sind¹⁾, muß man annehmen, daß bei schwereren Kernen infolge des wachsenden *relativen* Einflusses entweder der Störungsenergie zweiter Ordnung oder einer schwachen Anziehung zwischen gleichartigen Teilchen die Methode der linearen Interpolation für Stabilitätsbetrachtungen unzureichend wird.

§ 5. *Halbempirische Darstellung der Massendefekte*²⁾.

Um die Ordnung des Erfahrungsmaterials zu erleichtern und einer künftigen quantitativen Theorie die Daten in einer unmittelbarer deutbaren Form zu liefern, versuchen wir nun, den Gang der Kernenergien durch eine Interpolationsformel darzustellen, deren Form theoretisch plausibel ist, während eine Reihe theoretisch unbestimmt bleibender Konstanten durch die Bedingung einer möglichst guten Anpassung an die Erfahrung festgelegt wird. Unter der Energie eines Kerns von Z Protonen und N Neutronen verstehen wir dabei nicht die tiefste Energie, die ein System von Z Protonen und N Neutronen überhaupt annehmen kann, sondern die tiefste Energie des Gebildes, das entsteht, wenn diese $N + Z$ Teilchen sämtlich auf einen Raum von Kerndimensionen zusammengedrängt werden, vorausgesetzt, daß die Lebensdauer dieses Gebildes groß ist gegen die reziproken Kernfrequenzen. Diese Definition ist notwendig, wenn wir die Energien der α -Strahler (genauer aller schweren Kerne) einbeziehen wollen; denn es ist z. B. der tiefste Zustand des Systems von 84 Protonen und 126 Neutronen nicht der α -labile Kern Po_{84}^{210} , auch nicht das System $\text{Pb}_{82}^{206} + \text{He}_2^4$, in das er zerfällt, sondern, wegen des Minimums der Packungsanteile bei mittleren Kernen, ein System wie etwa $\text{Sn}_{50}^{126} + \text{Se}_{34}^{84}$ oder $\text{Mo}_{42}^{104} + \text{Mo}_{42}^{106}$. Bei Gebilden mit einer so kurzen Lebensdauer, daß unsere Definition unanwendbar würde, ist in der Praxis nur die Kenntnis der Energien ihrer Zerfallsprodukte von Interesse; für einige Grenzbetrachtungen müssen wir im folgenden solche Systeme berücksichtigen und verstehen unter ihrer Energie dann die absolut tiefste Energie, die sie annehmen können.

Nach § 3 hat die Energie der schwereren Kerne, die gleich viele Protonen und Neutronen enthalten, die Form

$$E(Z = N) = -\varepsilon \cdot (Z + N) + \eta \cdot 4\pi r^3 + \frac{3e^2 Z^2}{5r}. \quad (41)$$

¹⁾ K_{19}^{40} und Rb_{37}^{86} haben nach der Vermutung von Klemperer [Proc. Roy. Soc. London (A) 148, 638, 1935] zwar sehr lange Lebensdauer, aber durchaus normale Zerfallsenergien. — ²⁾ Die Überlegungen dieses Paragraphen wurden angeregt und stark gefördert durch eine von Herrn H. Euler vorgeschlagene und ausgeführte Darstellung der empirischen Massen leichter Kerne nach der Art der Fig. 3 und die daran anschließenden Diskussionen.

Dabei ist ε die Volumenenergie pro Teilchen und η die Oberflächenspannung pro Flächeneinheit. Für den Kernradius setzen wir

$$r = r_0 (Z + N)^{1/3}. \quad (42)$$

Wir suchen die Energien der (geraden) Kerne mit $Z \neq N$ durch eine ähnlich gebaute Summe einer Volumenenergie, einer Oberflächenenergie und der Coulombschen Energie der Protonen darzustellen:

$$E(Z, N) = E_V + E_O + E_C. \quad (43)$$

Durch eine Rechnung nach dem Muster von § 3 ließe sich der theoretische Verlauf dieser Funktion numerisch bestimmen. Für die erste Orientierung, die wir anstreben, genügt die folgende Annäherung.

In der Näherung von Majorana ist die Energie pro Teilchen unabhängig von $Z + N$ eine Funktion des Verhältnisses N/Z allein. Diese Funktion ist symmetrisch in Z und N und hat ihr Minimum bei $Z = N$. Für kleine Abweichungen von diesem Wert wird sie sich daher quadratisch mit $1 - Z/N$ ändern. Für sehr extreme Werte von Z/N tritt keine Bindung mehr ein. Denn wenn z. B. $N \gg Z$, so ist die kinetische Energie in der Grenze proportional zu $(\rho_N)^{5/3}$, also unabhängig von Z/N , die potentielle Energie dagegen ist proportional zu ρ_p und nimmt daher mit Z/N gegen Null ab. D. h. für jedes Z gibt es ein maximales N , bei dem noch ein Kern im oben definierten Sinn entstehen kann. Zusätzliche Neutronen werden nur durch eine schwache „van der Waals-Kraft“ oder überhaupt nicht gebunden; durch ihre Hinzufügung wird die Energie des Systems weder merklich vermehrt noch vermindert. Für sehr großen Neutronenüberschuß ist die Energie daher nur von Z abhängig, und zwar ungefähr proportional zu Z . Tragen wir nach der Art der Fig. 1 die Energie (bei festem $Z + N$) als Funktion von $Z - N$ auf, so wird sie demnach in der Nähe der Stellen $Z - N = \pm (Z + N)$, bei denen nur Protonen oder nur Neutronen vorhanden sind und die Bindungsenergie daher nach unseren bisherigen Annahmen verschwindet, linear mit $Z - N$ gehen. Die Steilheit dieses linearen Verlaufs steht in keinem einfachen Zusammenhang mit der Breite des Minimums bei $N = Z$. Wir brauchen also eine Funktion mit wenigstens zwei willkürlichen Konstanten, um zwischen beiden Gebieten näherungsweise richtig interpolieren zu können. Wir wählen die Form einer Hyperbel

$$E_V = -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} (Z + N) + \sqrt{\alpha^2 (Z + N)^2 + \beta^2 (Z - N)^2}. \quad (44)$$

Die Funktion verschwindet für $Z - N = \pm (Z + N)$ und lautet in der Nähe dieser Stellen

$$E_V \simeq -\frac{2\beta^2 Z}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \quad (45)$$

Für $Z = N$ folgt

$$\varepsilon = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha. \quad (46)$$

Da die Oberflächenspannung mit der mittleren kinetischen Energie und diese mit der gesamten Bindungsenergie in einer rohen Näherung proportional geht, werden wir keinen zu großen Fehler machen, wenn wir für sie dieselbe Abhängigkeit von Z/N ansetzen wie für E_V . Unter Berücksichtigung von (42) erhalten wir

$$E_O = \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \frac{(Z - N)^2}{(Z + N)^2}} \right) \gamma (Z + N)^{2/3}. \quad (47)$$

Zur Berechnung der Coulombenergie müssen wir die Änderung des Kernradius mit Z/N kennen. In der Näherung von Majorana nimmt das Kernvolumen von seinem Minimalwert bei $Z = N$ bis zu einem anderen, endlichen Wert bei dem Verhältnis Z/N , jenseits dessen der Kern als ein Gebilde nicht mehr existenzfähig ist, monoton zu. Wir wählen als rechnerisch einfachsten Ansatz eine lineare Änderung von $1/r$ mit $|Z - N|$:

$$E_C = \frac{3 e^2}{5} \frac{Z^2}{r_0 (Z + N)^{1/3}} \left(1 - \delta \frac{|Z - N|}{Z + N} \right). \quad (48)$$

Eine in § 3 nicht berücksichtigte Korrektur, die vor allem für leichtere Kerne wichtig wird, liefert ferner der durch die Coulombsche Wechselwirkung veranlaßte Austausch der Protonen¹⁾. Er bewirkt eine zusätzliche Energiedichte²⁾

$$F_A = - \frac{3}{2} \left(\frac{3}{8 \pi} \right)^{1/3} e^2 \rho^{4/3}. \quad (49)$$

Bei der Annahme einer homogenen Dichteverteilung der Protonen, die wir auch der Berechnung der Coulombenergie zugrunde gelegt haben, ergibt sich daraus eine Zusatzenergie

$$E_A = - \frac{3 e^2}{2^{4/3}} \frac{Z^{4/3}}{r}. \quad (50)$$

Schließlich müssen wir beachten, daß alle bisher abgeleiteten Formeln nur in dem Grenzfall gelten, in dem Z und N groß sind gegen Eins. Die Thomas-Fermi-Methode legt ja stets die Annahme großer Teilchenzahlen zugrunde; sie gibt daher keine Auskunft darüber, ob die Flüssigkeitsenergie zu $(Z + N)$ oder etwa zu $(Z + N - \text{const})$ proportional ist. Betrachten wir unsere Formeln als Anfang einer Entwicklung der Kernenergien nach fallenden Potenzen der Teilchenzahl, so müßten wir also das zweite Glied

¹⁾ Den Hinweis auf den Einfluß dieses Effektes verdanke ich Herrn S. Flügge. — ²⁾ F. Bloch, ZS. f. Phys. **57**, 545, 1929; vgl. H. Jensen, ebenda **89**, 713, 1934.

dieser Entwicklung noch kennen. Ein theoretischer Ansatz dafür läßt sich schwer angeben. Heisenberg (Solvay-Bericht) hat das Glied so groß gewählt, daß es den Anstieg der Aston'schen Kurve der Packungsanteile (vgl. Fig. 5) bei leichten Kernen qualitativ richtig wiedergab. Da wir diesen Anstieg in der Hauptsache der Wirkung der Oberflächenspannung zuschreiben, müssen wir den Verlauf der Massendefekte der leichten Kerne mehr im einzelnen verfolgen, um die beiden Effekte voneinander zu trennen. Die empirischen Massen scheinen heute genau genug bekannt zu sein, um ziemlich eindeutige Schlüsse zu ermöglichen.

Wir haben somit sechs Konstanten zur Verfügung (α , β , γ , δ , r_0 und die Konstante des zweiten Entwicklungsgliedes der Flüssigkeitsenergie). Das Erfahrungsmaterial, das wir darstellen müssen, enthält die 17 Massendefekte leichter Kerne, die durch Zertrümmerungsversuche sehr genau bekannt sind (Tabelle 4, Fig. 3), die Lage des Energieminimums als Funktion des Atomgewichts (die Gamowsche¹⁾ „Rinne“, Fig. 4), die Aston'schen Packungsanteile (Fig. 5), die Zerfallsenergien der radioaktiven Kerne und die Kernradien. Es gibt im wesentlichen zwei konsequente Wege zur Auswertung dieses Materials, je nachdem, ob man mit der Darstellung der leichten oder der schweren Kerne beginnt. Man kann die Konstanten so bestimmen, daß die Energien und Stabilitätsverhältnisse (radioaktive Zerfallsenergien) der Kerne zwischen $Z = 3$ und $Z = 8$ mit sehr großer Genauigkeit dargestellt werden; die mit diesen Konstanten berechneten Massendefekte der schweren Kerne weisen jedoch Fehler bis zu 20% auf. Man könnte umgekehrt durch geeignete Wahl der sechs Konstanten etwa die „Rinne“ und die Kurve der Packungsanteile jeweils an drei Punkten exakt darstellen; die Massendefekte der leichtesten Kerne werden dann merklich ungenauer wiedergegeben. Für die Kernradien erhält man in beiden Fällen plausible Werte.

Das geschilderte Ergebnis ist genau das, was man zu erwarten hat, wenn die Energien im großen den angenommenen glatten Funktionen folgen, im einzelnen aber periodische Schwankungen zeigen¹⁾. Der zweite Weg wird die theoretisch richtigeren Werte der Konstanten liefern, da er über die individuellen Eigenschaften abgeschlossener Schalen mittelt; dagegen liefert der erste Weg eine Interpolationsformel, die auch zur Voraussage noch unbekannter Massendefekte und Zerfallsenergien leichter Kerne geeignet ist.

Der erste, beiden Methoden gemeinsame Schritt ist die Bestimmung des zweiten Gliedes in der Entwicklung der Energie nach fallenden Potenzen

¹⁾ G. Gamow, ZS. f. Phys. **89**, 592, 1934.

der Teilchenzahl. Fig. 2 stellt die Massendefekte der Kerne mit $Z = N - 1$ von H_1^3 bis O_8^{17} als Funktion des Atomgewichts ($Z + N$) dar¹⁾. Die Punkte von Li_3^7 bis O_8^{17} liegen sehr genau auf einer Geraden, die aber die Abszissenachse nicht bei $Z + N = 0$, sondern etwa bei $Z + N = 3$ schneidet. Zur ersten groben Annäherung vernachlässigen wir die Abweichung des Verhältnisses N/Z von 1, suchen die Energien also durch die Formel (41) darzustellen. Von der Coulombenergie, die bei leichten Kernen klein ist, sehen wir zunächst ebenfalls ab. Wenn wir nun fordern, daß sowohl der

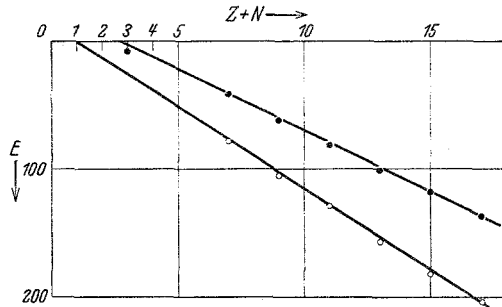


Fig. 2. Wahre und reduzierte Massendefekte der Kerne mit $Z = N - 1$ als Funktion des Atomgewichts.

Betrag wie die Ableitung der Energie nach $(Z + N)$ etwa an der Stelle des Kerns N_7^{15} durch (41) richtig dargestellt werden sollte, erhalten wir zwei Beziehungen zwischen ε und η . Wir können also die Oberflächenspannung näherungsweise berechnen und als Korrektur an den empirischen Energien anbringen. Die Werte, die wir dann erhalten, haben wir als die angenäherten Volumenenergien aufzufassen. Sie liegen wieder ziemlich gut auf einer Geraden (die kleine Abweichung läßt sich durch die Coulombenergie erklären), die nunmehr ziemlich genau durch den Punkt $Z + N = 1$ geht. Wir hätten also zu schließen, daß die Flüssigkeitsenergie ungefähr zu $(Z + N - 1)$ proportional ist.

Dieses Ergebnis ist insofern theoretisch befriedigend, als damit auch die Grenzfälle der allereinfachsten Kerne in der Formel enthalten sind. Für ein einzelnes Proton oder Neutron muß sich ja gerade der Massendefekt Null und für das Deuteron ungefähr gerade einmal, für H_1^3 und He_2^3 ungefähr gerade zweimal die elementare Bindungsenergie zwischen zwei ungleichen Teilchen ergeben. Obwohl wegen der Vernachlässigung der höheren Glieder in der Entwicklung nach $1/(Z + N)$ darin keine strenge Begründung gesehen werden kann, setzen wir daher im folgenden E_V proportional zu $(Z + N - 1)$. Eine entsprechende Änderung für den Ansatz der Oberflächenspannung wird durch den Umstand nahegelegt, daß auch die mittlere

¹⁾ Die Kerne mit $Z = N$ zeigen wegen des Unterschiedes der geraden und ungeraden Teilchenzahlen zu große *scheinbare* Unregelmäßigkeiten, um zur ersten Orientierung dienen zu können.

kinetische Energie näherungsweise proportional zu $(Z + N - 1)$ sein muß, da wegen der Abseparierung der Schwerpunktsbewegung nur $3 \cdot (Z + N - 1)$ unabhängige Freiheitsgrade für die Teilchenbewegung im Kern vorhanden sind (oder anders gesagt, da man im Ausdruck $Mv^2/2$ nicht die wirkliche, sondern die „reduzierte Masse“ der Teilchen einsetzen muß). Wir setzen also $E_0 \sim (Z + N - 1)^{2/3}$ und erhalten als Schlußformel für die Gesamtenergie:

$$E(Z, N) = \left(-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \frac{(Z - N)^2}{(Z + N)^2}} \right) [(Z + N - 1) - \gamma(Z + N - 1)^{2/3}] \\ + \frac{3e^2}{r_0(Z + N)^{1/3}} \left(1 - \delta \frac{|Z - N|}{Z + N} \right) \left[\frac{Z^2}{5} - \left(\frac{Z}{2} \right)^{4/3} \right]. \quad (51)$$

Die Konstanten α , β , γ , δ , r_0 wurden nun auf zwei Wegen bestimmt.

Methode I. Die Energien der geradzahigen leichten Kerne werden zugrunde gelegt. δ wird vernachlässigt, r_0 willkürlich gleich 0,45 gewählt (wäre die Dichte in den Kernen konstant, so würde aus den effektiven Radien der α -Strahler etwa $r_0 = 0,5$ folgen). $\varepsilon = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha$ und γ werden aus der Bedingung bestimmt, daß die Energien von C_6^{12} und O_8^{16} genau dargestellt werden sollen. Eine zweite Beziehung zwischen α und β [die „Breite“ der Hyperbel (44)] liefert die Bedingung, die Bindungsenergie von C_6^{14} solle etwas geringer sein als die empirische Bindungsenergie von N_7^{14} . Der Vergleich der theoretischen Energien der übrigen leichten Kerne [der geradzahigen nach (51), der ungeradzahigen nach der linearen Interpolation von § 4] zeigt, daß nur geringe nachträgliche Änderungen der gewonnenen α und β notwendig sind. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4 und 5 und in Fig. 3 angegeben.

Tabelle 3. Konstanten in (51).

Nach Methode I.	Nach Methode II.
$\alpha = 1,6$	$\alpha = 2,6$
$\beta = 13,9$	$\beta = 18,4$
$\gamma = 0,6$	$\gamma = 1,07$
$(\delta = 0)$	$\delta = 1,1$
$r_0 = 0,45$	$r_0 = 0,42$

Methode II. Die Z/N -Werte (die „Rinne“) und die Packungsanteile der schweren Kerne werden zugrunde gelegt. Zur Abkürzung der Rechnung wurden α und β aus dem rohen Wert $\varepsilon = 16$, der sich in § 3 ergab (Tabelle 2) und aus der Bedingung $E(C_6^{14}) > E(N_7^{14})$ von vornherein festgelegt. γ , δ und r_0 wurden bestimmt aus den Massendefekten von O_8^{16} und Hg_{80}^{200} nach (51) und aus der Bedingung

$$\left(\frac{\partial E(80, 120)}{\partial (Z - N)} \right) = 0, \quad (52)$$

die besagt, daß Hg_{80}^{200} gerade die tiefste bei $Z + N = 200$ mögliche Energie hat. Die Ergebnisse zeigen Fig. 4 und 5.

Tabelle 4. Massendefekte der leichten Kerne nach Methode I.

Kern	$-E_{th}$	Kern	$-E_{th}$	$-E_{exp}$	Kern	$-E_{th}$	$-E_{exp}$	Kern	$-E_{th}$	$-E_{exp}$
He_2^3	11,8	H_1^2	5,9	2,4	H_1^3	11,8	9,0	H_2^4	13,6	?
Li_3^6	26,4	He_2^4	23,6	29,8	He_3^5	27,2	?	He_4^6	30,8	?
Be_4^7	44,6	Li_3^6	35,9	33,5	Li_4^7	45,2	41,3	Li_5^8	48,4	?
B_5^8	62,8	Be_4^8	59,7	59,4	Be_5^9	64,4	61,4	Be_6^{10}	69,0	68,5
C_6^{11}	80,8	B_5^9	72,6	68,4	B_6^{10}	82,6	80,4	B_7^{11}	86,4	~ 86,6
N_7^{13}	99,4	C_6^{12}	96,1	96,6	C_7^{13}	101,7	101,2	C_8^{14}	107,3	< 108,6
O_8^{15}	117,3	N_7^{14}	109,7	108,6	N_8^{15}	120,0	119,4	N_9^{16}	124,5	< 132,8
F_9^{17}	135,8	O_8^{16}	132,6	132,8	O_9^{17}	139,1	137,3	O_{10}^{18}	145,6	(142,9)
		F_9^{18}	146,5	?	F_{10}^{19}	157,1	(157,9)			
		Ne_{10}^{20}	168,5	(169,6)						

Nicht aus Zertrümmerungsversuchen gewonnene experimentelle Massendefekte sind eingeklammert.

Der Fehler der theoretischen Energien in Tabelle 4 ist für alle Kerne mit gerader Ladung und Masse außer He_2^4 und dem unsicheren bandenspektroskopischen Wert O_8^{18} unter 1%, d. h. innerhalb der Grenzen der Meßgenauigkeit. Daß sich die Energie von He_2^4 mit unserer Methode nicht richtig ergeben würde, war zu erwarten. Sehr bemerkenswert ist aber, daß schon Be_4^8 sehr gut dargestellt wird. Dies scheint darauf hinzudeuten, daß man schon für die Kerne Be_4^8 , C_6^{12} usw. nicht annehmen braucht, die Protonen und Neutronen seien im Kern in erster Näherung in α -Teilchen zusammengefaßt. In derselben Richtung weist die Tatsache, daß die Massendefekte der Kerne mit $Z = N - 1$ keine Andeutung einer Periodizität mit der Zahl vier zeigen; die großen energetischen Unterschiede zwischen Be_4^8 , C_6^{12} , O_8^{16} einerseits und Li_3^6 , B_5^{10} , N_7^{14} hätten demnach nichts mit der

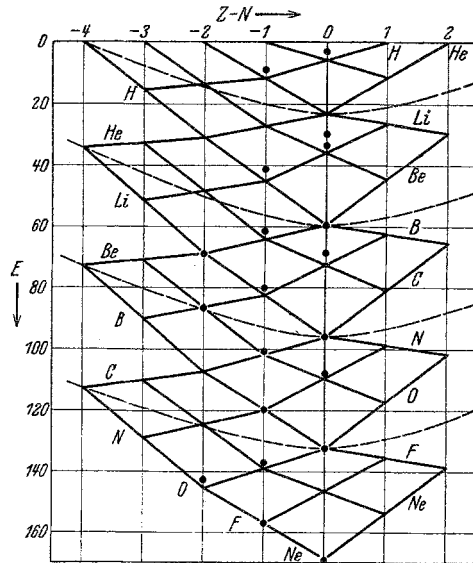


Fig. 3. Massendefekte leichter Kerne (Punkte experimentell, Geradennetz theoretisch).

Bildung von α -Teilchen im Kern zu tun, sondern könnten ebensogut der Bildung unabhängiger Zweierschalen der Protonen und Neutronen zugeschrieben werden. Die lineare Interpolation bewährt sich für Kerne ungerader Masse oberhalb C_6^{13} sehr gut. Der Fehler liegt für drei Kerne unter 1%; O_8^{17} fällt aus der Reihe und müßte wahrscheinlich experimentell etwas tiefer liegen. Für leichtere Kerne müßten die Geraden (vgl. Fig. 3) bei den Kernen mit ungerader Masse etwas nach oben durchknicken (Störung zweiter Ordnung), ebenso bei den Kernen mit gerader Masse aber ungerader Ladung. Berücksichtigt man diese Korrektur, die bei N_7^{14} 1,1 Einheiten beträgt, so wird F_9^{18} gerade labil gegen Zerfall in O_8^{18} .

Tabelle 5. Aufteilung der Energie in Summanden nach Methode I.

Kern	$-E_V$	$-E_O$	$-E_C$	$-E_A$	$-E_{th}$
He_2^4	37,2	- 14,1	(- 1,8)	(2,3)	23,6
Be_4^8	87,0	- 26,1	- 5,8	4,6	59,7
C_6^{12}	136,5	- 35,9	- 11,4	6,9	96,1
O_8^{16}	186,2	- 44,4	- 18,4	9,2	132,6
Ne_{10}^{20}	235,9	- 52,2	- 26,7	11,5	168,5
O_8^{18}	200,3	- 45,8	- 17,7	8,8	145,6
C_6^{16}	153,0	- 36,5	- 10,2	6,2	112,5

Die Zerfallsenergien der instabilen Isotope sind mit der Erfahrung, soweit Daten vorliegen, im Einklang. Z. B. $E(N_7^{13}) - E(C_6^{13}) = 101,7 - 99,4 = 2,3$, d. h. etwa $2\frac{1}{2}$ Millionen Volt. Sehr hohe Zerfallsenergien

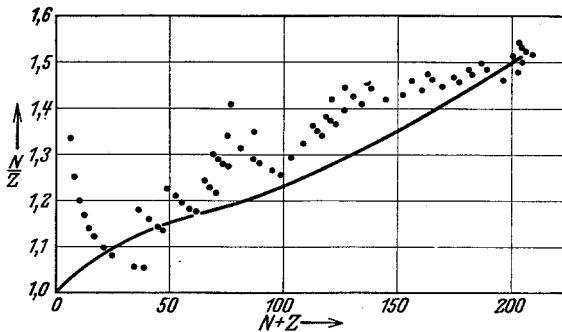


Fig. 4. Lage der stabilen Isotope.

ergeben die Kerne H_1^4 , Li_3^8 , B_5^{12} , N_7^{16} . Von dem Kern N_7^{16} ist bekannt, daß er sehr schnell zerfällt, was auf hohe Zerfallsenergie hindeutet. B_5^{12} scheint Elektronen mit Energien bis zu 11 Millionen Volt zu emittieren¹⁾; aus Ta-

¹⁾ H. R. Crane, L. A. Delsasso, W. A. Fowler, C. C. Lauritsen, Phys. Rev. 47, 887, 1935.

belle 4 folgt $E(B_5^{12}) - E(C_6^{12}) = 9,7 \cdot 10^{-3}$ ME., also ebenfalls nahezu $11 \cdot 10^6$ e-V. Li_3^8 müßte sogar unter Abgabe von Elektronen mit maximal $11,3 \cdot 10^{-3}$ ME. Energie in Be_4^8 zerfallen.

Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung in Fig. 4 und 5 ist noch nicht völlig befriedigend, wenn auch die großen Züge richtig

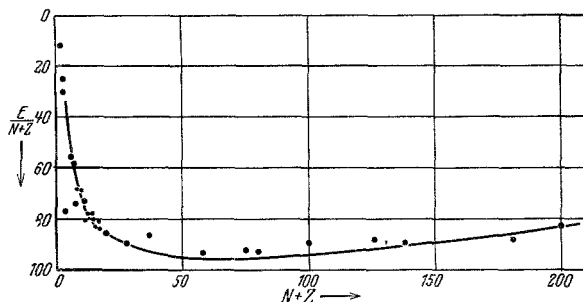


Fig. 5. Verlauf der Packungsanteile.

wiedergegeben sind. Vielleicht läßt sich die Übereinstimmung durch eine konsequenteren Durchführung der Methode II noch verbessern; vielleicht äußert sich hier aber schon das Phänomen des Schalenabschlusses, auf das Gamow (l. c.) und Elsasser (l. c.) hingewiesen haben. Das stärkste Argument dafür, daß unsere Darstellung nicht nur eine Interpolationsformel ist, sondern konkrete physikalische Bedeutung hat, liegt wohl darin, daß die Kernradien, die lediglich aus dem Verlauf der Rinne und der Packungsanteile durch energetische Betrachtungen gewonnen sind, mit den direkt bestimmten Radien innerhalb der Fehlergrenzen übereinstimmen.

§ 6. Zusammenfassung.

§ 1. Der allgemeine Verlauf der Massendefekte wird diskutiert.

§ 2. Der Anstieg der Packungsanteile nach der Seite der leichten Kerne hin läßt sich durch die Annahme einer Oberflächenspannung der „Kernflüssigkeit“ darstellen. Den wichtigsten Beitrag zu dieser Oberflächenspannung liefert die von der Unbestimmtheitsrelation geforderte Verschmierung des Kernrandes. Dieser Effekt läßt sich in der Thomas-Fermi-Methode berücksichtigen, wenn die Eigenfunktionen in jedem kleinen Teilvolumen des Kerns nicht als ebene Wellen, sondern als Wellen mit linear variierender Amplitude angesetzt werden. Es ergibt sich ein Zusatzglied zur kinetischen Energie von der Form

$$\frac{h^2}{32 \pi^2 M} \frac{(\text{grad } \varrho)^2}{\varrho}.$$

§ 3. Setzt man das Austauschpotential zwischen Neutron und Proton in der Form $J(r) = ae^{-br}$ an, so ergibt die Forderung, daß der Massendefekt von Sauerstoff richtig dargestellt werden solle, eine Beziehung zwischen a und b (Tabelle 1). Man erhält eine wesentlich stärkere Anziehung als diejenige, die man nach der genaueren Rechnung von Wigner zur Erklärung des Massendefekts von He_3^4 braucht. Daraus folgt, daß die Thomas-Fermi-Methode nur zu Größenordnungsabschätzungen verwendet werden darf.

§ 4. Die Annahme, daß Protonen und Neutronen unter dem Einfluß der Austauschkraft jeweils in Zweierschalen gebunden werden, führt zu der Regel: die Bindungsenergie eines Kerns, der eine ungerade Anzahl von Neutronen enthält, ist etwas kleiner als das arithmetische Mittel der Bindungsenergien der beiden Kerne, die ebensoviele Protonen und ein Neutron weniger bzw. mehr als er enthalten; sowie zu der entsprechenden Regel für ungerade Protonenzahlen. Der Massendefekt von N_7^{14} und das Nichtvorhandensein der Kerne dieses Typs im Gebiet der schwereren Elemente läßt sich nach dieser Regel plausibel machen. Die Einführung von beträchtlichen Kräften zwischen gleichartigen Teilchen erscheint demnach als unnötig.

§ 5. Die Massendefekte der Kerne von gerader Ladung und Masse (und, durch Interpolation nach der Regel von § 4, auch die der übrigen Kerne) lassen sich als Summe von drei einfachen Funktionen der Teilchenzahlen darstellen, die anschaulich die Volumenenergie der Kernflüssigkeit, die Oberflächenspannung und die (um ein Austauschglied korrigierte) Coulombsche Abstoßungsenergie der Protonen bedeuten. Dabei muß angenommen werden, daß die Flüssigkeitsenergie nicht zum Atomgewicht $(Z + N)$, sondern zu $(Z + N - 1)$ proportional ist. Es ergibt sich eine Darstellung des Verlaufs der Massendefekte und der Verhältniszahlen N/Z , die als Zusammenfassung der empirischen Daten über die Größe der Kernenergien betrachtet werden kann, und eine etwas abweichende Interpolationsformel für das Gebiet der leichten Kerne (bis Ne_{10}^{20}), die eine ziemlich genaue Voraussage von Massendefekten und Zerfallsenergien gestatten dürfte.

Zum Schluß möchte ich Herrn Prof. Heisenberg für seine ständige Unterstützung und Beratung bei der Durchführung dieser Arbeit herzlich danken. Ebenso danke ich Herrn Wang Foh-san für die Ausführung der mühsamen numerischen Rechnungen von § 3, sowie Herrn Euler und Herrn Flügge für mehrere wichtige Anregungen und Diskussionen.