Zeitschrift für Physik 51 (1928) 204

Zur Quantentheorie des Atomkernes.

Von **G. Gamow**, z. Zt. in Göttingen.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 2. August 1928.)

Es wird der Versuch gemacht, die Prozesse der α-Ausstrahlung auf Grund der Wellenmechanik näher zu untersuchen und den experimentell festgestellten Zusammenhang zwischen Zerfallskonstante und Energie der α-Partikel theoretisch zu erhalten.

§ 1. Es ist schon öfters* die Vermutung ausgesprochen worden, daß im Atomkern die nichtcoulombschen Anziehungskräfte eine sehr wichtige Rolle spielen. Über die Natur dieser Kräfte können wir viele Hypothesen machen.

Es können die Anziehungen zwischen den magnetischen Momenten der einzelnen Kernbauelemente oder die von elektrischer und magnetischer Polarisation herrührenden Kräfte sein.

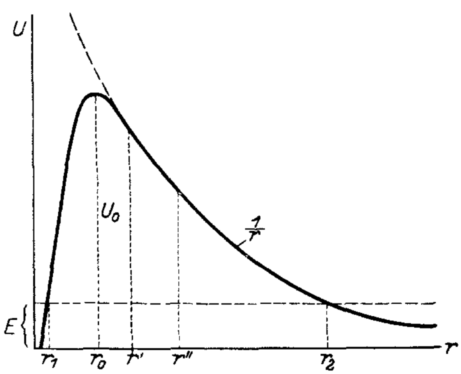

Fig. 1.

Jedenfalls nehmen diese Kräfte mit wachsender Entfernung vom Kern sehr schnell ab, und nur in unmittelbarer Nähe des Kernes überwiegen sie den Einfluß der Coulombschen Kraft.

Aus Experimenten über Zerstreuung der α-Strahlen können wir schließen, daß, für schwere Elemente, die Anziehungskräfte bis zu einer Entfernung $\sim 10^{-12}$ cm noch nicht merklich sind. So können wir das auf Fig. 1 gezeichnete Bild für den Verlauf der potentiellen Energie annehmen.

Hier bedeutet r'' die Entfernung, bis zu welcher experimentell nachgewiesen ist, daß Coulombsche Anziehung allein existiert. Von r' beginnen die Abweichungen (r' ist unbekannt und vielleicht viel kleiner als r'') und bei r_0 hat die U-Kurve ein Maximum. Für $r < r_0$ herrschen schon die Anziehungskräfte vor, in diesem Gebiet würde das Teilchen den Kernrest wie ein Satellit umkreisen.

* J. Frenkel, ZS. f. Phys. **37**, 243, 1926; E. Rutherford, Phil. Mag. **4**, 580, 1927; D. Enskog, ZS. f. Phys. **45**, 852, 1927.

Diese Bewegung ist aber nicht stabil, da seine Energie positiv ist, und nach einiger Zeit wird das α-Teilchen wegfliegen (α-Ausstrahlung). Hier aber begegnen wir einer prinzipiellen Schwierigkeit.

Um wegzufliegen, muß das α-Teilchen eine Potentialschwelle von der Höhe U_0 (Fig. 1) überwinden, seine Energie darf nicht kleiner als U_0 sein. Aber die Energie der α-Partikel ist, wie experimentell nachgewiesen ist, viel kleiner. Z. B. findet man* bei der Untersuchung der Streuung von RaC'-α-Strahlen, als sehr schnelle Partikel, an Uran, daß für den Urankern das Coulombsche Gesetz bis zu einer Entfernung von $3{,}2 \cdot 10^{-12}$ cm gilt. Andererseits haben die von Uran selbst emittierten α-Partikeln eine Energie, die auf der Abstoßungskurve einem Kernabstand von $6{,}3 \cdot 10^{-12}$ cm (r_2 in Fig. 1) entspricht. Soll eine α-Partikel, die aus dem Inneren des Kernes kommt, wegfliegen, so müßte sie das Gebiet zwischen r_1 und r_2 durchlaufen, wo ihre kinetische Energie negativ wäre, was nach klassischen Vorstellungen natürlich unmöglich ist.

Um diese Schwierigkeit zu überwinden, machte Rutherford** die Annahme, daß die α-Partikel im Kerne neutral ist, da sie dort noch zwei Elektronen enthalten soll. Erst bei einem gewissen Kernabstand jenseits des Potentialmaximums verliert sie, nach Rutherford, ihre beiden Elektronen, die in den Kern zurückfallen, und fliegt weiter unter Entwirkung der Coulombschen Abstoßungskraft. Aber diese Annahme scheint sehr unnatürlich und dürfte kaum den Tatsachen entsprechen.

§ 2. Betrachten wir die Frage vom Standpunkt der Wellenmechanik, so fällt die oben erwähnte Schwierigkeit von selbst fort. In der Wellenmechanik nämlich gibt es für ein Teilchen immer eine von Null verschiedene Übergangswahrscheinlichkeit, von einem Gebiet in ein anderes Gebiet gleicher Energie, das durch eine beliebig, aber endlich hohe Potentialschwelle von dem ersten getrennt ist***.

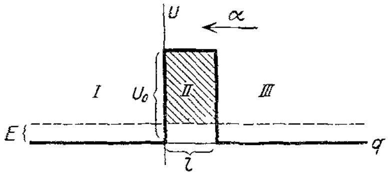

Fig. 2.

Wie wir weiter sehen werden, ist die Wahrscheinlichkeit eines solchen Überganges allerdings sehr klein, und zwar um so kleiner, je

* Rutherford, l. c., S. 581.

** Derselbe, l. c., S. 584.

*** Siehe z. B. Oppenheimer, Phys. Rev. **31**, 66, 1928; Nordheim, ZS. f. Phys. **46**, 833, 1927.

höher die zu überwindende Potentialschwelle ist. Um diese Tatsache zu erläutern, wollen wir ein einfaches Beispiel untersuchen.

Wir haben eine rechteckige Potentialschwelle und wir wollen die Lösung der Schrödingerschen Gleichung finden, welche den Durchgang der Partikel von rechts nach links darstellt. Für die Energie E schreiben wir die Wellenfunktion ψ in der folgenden Form:

$$\psi = \Psi(q) \cdot e^{+\frac{2\pi i E}{h} t},$$

wo $\Psi(q)$ der Amplitudengleichung:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - U)\Psi = 0 \tag{1}$$

genügt.

Für das Gebiet I haben wir die Lösung

$$\Psi_{\mathrm{I}} = A \cos(kq + \alpha),$$

wo A und α zwei beliebige Konstanten sind und

$$k = \frac{2\pi\sqrt{2m}}{h} \cdot \sqrt{E} \tag{2a}$$

bedeutet. In dem Gebiet II lautet die Lösung

$$\Psi_{\mathrm{II}} = B_1 e^{-k'q} + B_2 e^{+k'q},$$

wo

$$k' = \frac{2\pi\sqrt{2m}}{h}\sqrt{U_0 - E} \tag{2b}$$

ist.

An der Grenze $q = 0$ gelten die Bedingungen:

$$\psi_{\mathrm{I}}(0) = \psi_{\mathrm{II}}(0) \quad \text{und} \quad \left[\frac{\partial \Psi_{\mathrm{I}}}{\partial q}\right]_{q=0} = \left[\frac{\partial \Psi_{\mathrm{II}}}{\partial q}\right]_{q=0},$$

woraus wir leicht

$$B_1 = \frac{A}{2\sin\vartheta}\sin(\alpha + \vartheta); \quad B_2 = -\frac{A}{2\sin\vartheta}\sin(\alpha - \vartheta)$$

erhalten, wo

$$\sin\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{k'}\right)^2}}$$

ist.

Die Lösung im Gebiet II lautet daher:

$$\Psi_{\mathrm{II}} = \frac{A}{2\sin\vartheta}\left[\sin(\alpha + \vartheta) \cdot e^{-k'q} - \sin(\alpha - \vartheta)\, e^{+k'q}\right].$$

In III haben wir wieder:

$$\Psi_{\mathrm{III}} = C\cos(kq + \beta).$$

An der Grenze $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{l}$ haben wir aus den Grenzbedingungen:

$$\frac{A}{2\sin\vartheta}\left[\sin(\alpha+\vartheta)\,e^{-lk'} - \sin(\alpha-\vartheta)\,e^{+lk'}\right] = C\cos(k\boldsymbol{l}+\beta)$$

und

$$\frac{A}{2\sin\vartheta}\,k'\left[-\sin(\alpha+\vartheta)\,e^{-lk'} - \sin(\alpha-\vartheta)\,e^{+lk'}\right] = -k\,C\cos(kl+\beta).$$

So ist:

$$\begin{aligned} C^2 = \frac{A^2}{4\sin^2\vartheta}\Bigg\{&\left[1+\left(\frac{k'}{k}\right)^2\right]\sin^2(\alpha-\vartheta)\,.\,e^{2lk'} \\ &-\left[1-\left(\frac{k'}{k}\right)^2\right]2\sin(\alpha-\vartheta)\sin(\alpha+\vartheta) \\ &+\left[1+\left(\frac{k'}{k}\right)^2\right]\sin^2(\alpha+\vartheta)\,e^{-2lk'}\Bigg\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Die Ausrechnung des $\boldsymbol{\beta}$ ist für uns nicht von Interesse. Uns interessiert nur der Fall, wo $\boldsymbol{lk'}$ sehr groß ist, so daß wir nur das erste Glied in (3) zu berücksichtigen brauchen.

So haben wir die folgende Lösung:

Links: Rechts:

$$A\cos(kq+\alpha)\ \ldots\ A\frac{\sin(\alpha-\vartheta)}{2\sin\vartheta}\left[1+\left(\frac{k'}{k}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.\,e^{+lk'}\cos(kq+\beta).$$

Wenn wir jetzt $\boldsymbol{\alpha}-\frac{\pi}{2}$ statt $\boldsymbol{\alpha}$ schreiben, die erhaltene Lösung mit $\boldsymbol{i}$ multiplizieren und beide Lösungen addieren, so erhalten wir links:

$$\Psi = A\,e^{i(kq+\alpha)}, \quad (4\text{a})$$

rechts aber:

$$\begin{aligned}\Psi = \frac{A}{2\sin\vartheta}\left[1+\left(\frac{k'}{k}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.\,e^{+lk'}\{&\sin(\alpha-\vartheta)\cos(kq+\beta) \\ &-i\cos(\alpha+\vartheta)\cos(kq+\beta')\},\end{aligned} \quad (4\text{b})$$

wo $\boldsymbol{\beta'}$ die neue Phase ist.

Multiplizieren wir diese Lösung mit $e^{2\pi i\frac{E}{h}t}$, so erhalten wir für $\boldsymbol{\psi}$ links die (von rechts nach links) laufende Welle, rechts aber den komplizierten, von der stehenden Welle wenig abweichenden Schwingungsprozeß mit einer sehr großen ($e^{lk'}$) Amplitude. Das bedeutet nichts anderes, als daß die von rechts kommende Welle teils reflektiert und teils durchgegangen ist.

So sehen wir, daß die Amplitude der durchgegangenen Welle um so kleiner ist, je kleiner die Gesamtenergie E ist, und zwar spielt der Faktor:

$$e^{-lk'} = e^{-\frac{2\pi \cdot \sqrt{2m}}{h}\sqrt{U_0 - E}\cdot l}$$

in dieser Abhängigkeit die wichtigste Rolle.

§ 3. Jetzt können wir das Problem für zwei symmetrische Potentialschwellen (Fig. 3) lösen. Wir werden zwei Lösungen suchen.

Eine Lösung soll für positive q gelten und für $q > q_0 + l$ die Welle:

$$A\, e^{i\left(\frac{2\pi E}{h}t - kq + \alpha\right)}$$

geben. Die andere Lösung gilt für negative q und gibt für $q < -(q_0 + l)$ die Welle

$$A \cdot e^{i\left(\frac{2\pi}{h}Et + q\varkappa' - \alpha\right)}.$$

Dann können wir die beiden Lösungen an der Grenze $q = 0$ nicht stetig aneinanderfügen, denn wir haben hier zwei Grenzbedingungen zu

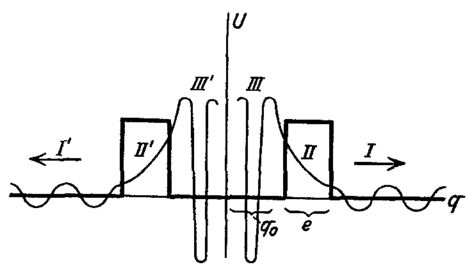

Fig. 3.

erfüllen und nur eine Konstante α zur Verfügung. Die physikalische Ursache dieser Unmöglichkeit ist, daß die aus diesen zwei Lösungen konstruierte ψ-Funktion dem Erhaltungssatz

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-(q_0+l)}^{+(q_0+l)} \psi\overline{\psi}\, dq = 2\cdot\frac{-h}{4\pi i m}\left[\psi \operatorname{grad}\overline{\psi} - \overline{\psi}\operatorname{grad}\psi\right]_{\mathrm{I}}$$

nicht genügt.

Um diese Schwierigkeit zu überwinden, müssen wir annehmen, daß die Schwingungen gedämpft sind, und E komplex setzen:

$$E = E_0 + i\,\frac{h\lambda}{4\pi},$$

wo E_0 die gewöhnliche Energie ist und λ das Dämpfungsdekrement (Zerfallskonstante). Dann sehen wir aber aus den Relationen (2a) und (2b), daß auch k und k' komplex sein sollen, d. h., daß die Amplitude unserer Wellen auch von der Koordinate q expotentiell abhängt. Z. B. für die laufende Welle wird die Amplitude in Richtung der Wellenausbreitung wachsen. Das bedeutet aber nichts weiter als daß, wenn die Schwingung am Ausgangspunkt der Welle gedämpft ist, die Amplitude des früher ausgegangenen Wellenstückes größer sein muß. Wir können jetzt α so wählen, daß die Grenzbedingungen erfüllt werden. Aber die strenge Lösung interessiert uns nicht. Wenn λ im Vergleich mit $\frac{E}{h}$ klein ist $\left(\text{für Ra C}' \text{ ist } \frac{E}{h} \backsimeq \frac{10^{-5}}{10^{-27}\,\text{sec}} = 10^{+22}\,\text{sec}^{-1} \text{ und } \lambda = 10^{+5}\,\text{sec}^{-1}\right)$, so ist die Änderung der $\Psi(q)$ sehr klein, und wir können einfach die alte Lösung mit $e^{-\frac{\alpha}{2}t}$ multiplizieren.

Dann lautet der Erhaltungssatz:

$$\frac{\partial}{\partial t}\, e^{-\lambda t} \int\limits_{-(q_0+l)}^{+(q_0+l)} \Psi^{(q)}_{\mathrm{II,III}} \cdot \Psi^{(q)}_{\mathrm{II,III}}\, d\,q = -2 \cdot \frac{A^2 h}{4\pi i m} \cdot 2\, i\, k \cdot e^{-\lambda t},$$

woraus

$$\lambda = \frac{4\,h\,k\,\sin^2\vartheta}{\pi\, m\left[1+\left(\frac{k'}{k^0}\right)^2\right] 2\,(l+q_0)\,\varkappa} \cdot e^{-\frac{4\pi l\sqrt{2m}}{h}\sqrt{U_0-E}}, \tag{5}$$

folgt, wo $\varkappa$ eine Zahl von der Größenordnung 1 ist.

Diese Formel gibt die Abhängigkeit der Zerfallkonstante von der Zerfallsenergie für unser einfaches Kernmodell.

§ 4. Jetzt können wir zu dem Falle des wirklichen Kernes übergehen.

Wir können die entsprechende Wellengleichung nicht lösen, da wir den genauen Potentialverlauf in der Nähe des Kernes nicht kennen. Aber einige, für unser einfaches Modell erhaltene, Ergebnisse können wir auch auf den wirklichen Kern ohne genaue Kenntnis des Potentialverlaufs übertragen.

Wie gewöhnlich im Falle der Zentralkraft, werden wir die Lösung in Polarkoordinaten suchen, und zwar in der Form

$$\Psi = u\,(\theta, \varphi)\,\chi\,(r).$$

Für u erhalten wir die Kugelfunktionen, und χ muß der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{d\chi}{dr} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left[E - U - \frac{h^2}{8\pi^2 m}\cdot\frac{n\,(n+1)}{r^2}\right]\chi = 0$$

genügen, wo n die Ordnung der Kugelfunktion ist. Wir können $n = 0$ annehmen, denn wenn $n > 0$, würde das wirklich sein, als ob die potentielle Energie vergrößert wäre, und infolgedessen wird für diese Schwingungen die Dämpfung viel kleiner. Die Partikel muß zuerst in den Zustand $n = 0$ übergehen und kann erst dann wegfliegen.

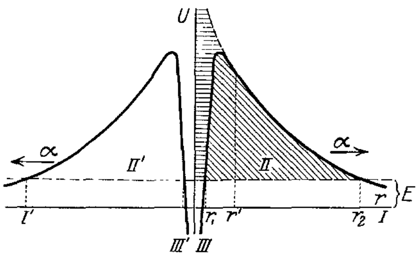

Fig. 4.

Es ist sehr gut möglich, daß derartige Übergänge die γ-Strahlen verursachen, welche stets α-Emission begleiten. Der wahrscheinliche Verlauf von U ist in Fig. 4 wiedergegeben.

Für große Werte von r werden wir für χ die Lösung

$$\chi_{\mathrm{I}} = \frac{A}{r} e^{i\left(\frac{2\pi E}{h} t - kr\right)}$$

annehmen.

Obgleich man die genaue Lösung des Problems in diesem Falle nicht erhalten kann, können wir doch sagen, daß in den Gebieten I und III χ im Mittel nicht rasch $\left(\text{in dreidimensionalem Falle etwa wie } \frac{1}{r}\right)$ abnehmen wird.

Im Gebiet II wird aber χ expotentiell abnehmen, und zwar können wir in Analogie mit unserem einfachen Falle erwarten, daß der Zusammenhang zwischen Amplitudenabnahme und E durch den Faktor:

$$e^{-\frac{2\pi\sqrt{2m}}{h}\int\limits_{r_1}^{r_2}\sqrt{U-E}\,dr}$$

angenähert gegeben ist.

Bei Anwendung des Erhaltungssatzes können wir wieder die Formel:

$$\lambda = D \,.\, e^{-\frac{2\pi\sqrt{2m}}{h}\int\limits_{r_1}^{r_2}\sqrt{U-E}\,dr} \tag{6}$$

schreiben, wo D von den besonderen Eigenschaften des Kernmodells abhängt. Die Abhängigkeit des D von E können wir neben den der expotentiellen Abhängigkeit des zweiten Faktors vernachlässigen.

Wir können auch statt des Integrals

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\sqrt{U-E}\,dr$$

angenähert das Integral:

$$\int\limits_0^{\frac{2Ze^2}{E}} \sqrt{\frac{2Ze^2}{r} - E} \,.\, dr$$

setzen.

Der relative Fehler, den wir dabei begehen, wird von Größenordnung

$$\frac{\int\limits_0^{r_1} \sqrt{\frac{1}{r}}\, dr}{\int\limits_0^{r_2} \sqrt{\frac{1}{r}}\, dr} = \sqrt{\frac{r'}{r_2}}.$$

Da $\frac{r'}{r_2}$ klein ist, so wird dieser Fehler nicht sehr groß. Da bei den verschiedenen radioaktiven Elementen E nicht sehr verschiedene Werte hat, schreiben wir angenähert:

$$\lg\lambda = \lg D - \frac{4\pi\sqrt{2m}}{h}\left\{\int\limits_0^{\frac{2Ze^2}{E_0}} \sqrt{\frac{2Ze^2}{r} - E_0}\, dr + \frac{\partial}{\partial E}\int\limits_0^{\frac{2Ze^2}{E}} \sqrt{\frac{2Ze^2}{r} - E}\, dr \,.\, \varDelta E\right\}$$

oder

$$\lg\lambda = \mathrm{Const}_E + B_E \,.\, \varDelta E,$$

wo

$$B = -\frac{4\pi\sqrt{2m}}{h}\frac{\partial}{\partial E}\int\limits_0^{\frac{2Ze^2}{E}} \sqrt{\frac{2Ze^2}{r} - E}\, dr = \frac{4\pi\sqrt{2m}}{2h}\int\limits_0^{\frac{2Ze^2}{E}} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2Ze^2}{r} - E}\, \cancel{dr}}.$$

Setzen wir:

$$\left.\begin{aligned} &\varrho = \frac{E}{2Ze^2}\, r, \\ &\text{so ist:} \\ &b = \frac{4\pi\sqrt{2m} \,.\, 2Ze^2}{2hE^{3/2}}\int\limits_0^1 \frac{d\varrho}{\sqrt{\frac{1}{\varrho} - 1}} = \frac{\pi^2\sqrt{2m} \,.\, 2Ze^2}{hE^{3/2}}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Nun wollen wir diese Formel mit den experimentellen Tatsachen vergleichen. Es ist bekannt*, daß, wenn wir als Abszisse die Energie

* Geiger und Nuttall, Phil. Mag. **23**, 439, 1912; Swinne, Phys. ZS. **13**, 14, 1912.

der α-Partikel, als Ordinate den Logarithmus der Zerfallkonstante auftragen, alle Punkte für eine bestimmte radioaktive Familie auf einer Geraden liegen. Für verschiedene Familien erhält man verschiedene parallele Gerade. Die empirische Formel lautet:

$$\lg \lambda = \text{Const} + b E,$$

wo b eine allen radioaktiven Familien gemeinsame Konstante ist.

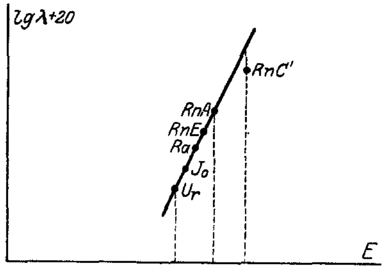

Fig. 5.

Der experimentelle Wert von b (aus **Ra A** und **Ra** berechnet) ist

$$b_{\text{exper.}} = 1{,}02 \,.\, 10^{+7}.$$

Wenn wir aber in unsere Formel den Energiewert für Ra A einsetzen, so gibt die Rechnung

$$b_{\text{theor.}} = 0{,}7 \,.\, 10^{+7} *.$$

Die Übereinstimmung der Größenordnung zeigt, daß die Grundannahme der Theorie richtig sein dürfte. Nach unserer Theorie müssen gewisse Abweichungen von dem linearen Gesetz bestehen: mit wachsender Energie muß b abnehmen, d. h., daß $\log \lambda$ etwas langsamer als E abnehmen muß. Hiermit stimmten die Messungen von Jacobsen**, welcher für Ra C', dessen α-Strahlung sehr energiereich ist, als Zerfallskonstante den Wert $8{,}4 \,.\, 10^5$ erhält, während aus dem linearen Gesetz der Wert $5 \,.\, 10^7$ folgt.

Zum Schluß möchte ich noch meinem Freund N. Kotschin meinen besten Dank aussprechen für die freundliche Besprechung der mathematischen Fragen. Auch Herrn Prof. Born möchte ich für die Erlaubnis, in seinem Institut zu arbeiten, herzlich danken.

Göttingen, Institut für theoretische Physik, 29. Juli 1928.

---

* Für andere Elemente erhalten wir angenähert denselben Wert, da Z für verschiedene radioaktive Elemente nur wenig verschieden ist.

** Jacobsen, Phil. Mag. **47**, 23, 1924.